I. FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

1. Komplexní čísla a operace v $\mathbb{C}$

Def.: Označíme $\mathbb{C}$ množinu komplexních čísel $x + jy = z$, $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

j – imaginární jednotka. $j^2 = -1$

$x = \mathrm{Re}\, z$ – reálná část

$y = \mathrm{Im}\, z$ – imaginární část

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ – absolutní hodnota

$\bar{z} = x - jy$ – komplexně sdružené k z, značí se i z^*

Relace a operace v $\mathbb{C}$

1. Rovnost $x_1 + jy_1 = x_2 + jy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$ v $\mathbb{R}$
2. Součet $(x_1+jy_1)+(x_2+jy_2) = (x_1+x_2)+j(y_1+y_2)$
3. Součin $(x_1+jy_1)\cdot(x_2+jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$
4. Opačné číslo $z = -x - jy$; $z + (-z) = 0 + j0 \equiv 0$
5. Rozdíl $z = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
6. Převrácená hodnota

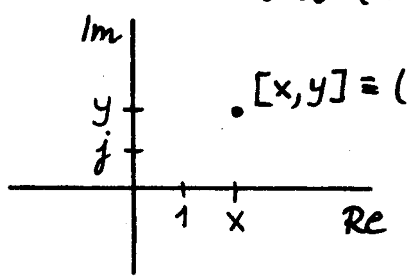
   $z \neq 0$, $\frac{1}{z}$; $z \cdot \frac{1}{z} = 1$

   $$\frac{1}{x+jy} = \frac{x-jy}{(x+jy)(x-jy)} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{jy}{x^2+y^2} \quad ; \quad z\cdot\frac{1}{z} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$
7. Podíl

   $$\frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2} = (x_1+jy_1)\cdot\frac{1}{x_2+jy_2} = \frac{(x_1+jy_1)(x_2-jy_2)}{x_2^2+y_2^2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+j(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

Pro 1 až 7 platí všechny vlastnosti jako pro $\mathbb{R}$ čísla.

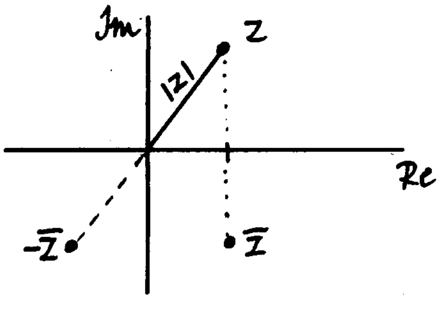
Gaussova rovina (otevřená)



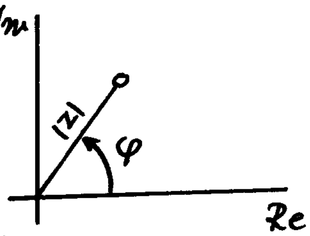
$x + j0$ – považujeme za reálné číslo

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$0 + jy$ – ryze imaginární



Goniometrický (exponenciální) tvar



$$z = |z|\cos\varphi + j|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$x = |z|\cos\varphi,\ y = |z|\sin\varphi$$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{|z|},\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Úhel φ nazýváme argument komplexního čísla z, $z \neq 0$.

Def.: Množina všech úhlů φ, pro které je $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$ nazýváme argumentem komplexního čísla z, $z \neq 0$.

Arg z je mnohoznačnou funkcí z, hodnotě z je přiřazena posloupnost tvaru $\{\varphi + 2k\pi$, k je celé$\}$, kde φ je jedním z úhlů.

Je-li hodnota Arg z podmínkami vybrána jednoznačně, mluvíme o jednoznačné větvi funkce Arg z.

Jednoznačnou větev argumentu zadáme intervalem délky 2π, ve kterém volíme hodnotu:

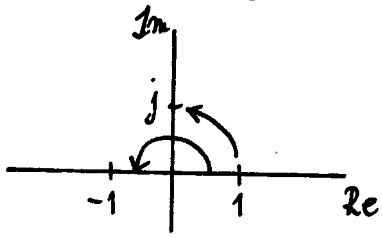
$$\arg_\alpha z = \{\varphi,\ \varphi \in \mathrm{Arg}\, z;\ \alpha - \pi < \varphi \leq \alpha + \pi\}$$

Hlavní hodnota argumentu je hodnota $\arg z = \arg_0 z = \{\varphi, \varphi \in \mathrm{Arg}\, z, -\pi < \varphi \leq \pi\}$

Př. 1.: $\mathrm{Arg}\ 1 = \{0 + 2k\pi$, k je celé$\}$, $\arg 1 = 0$

$\mathrm{Arg}(-1) = \{(2k+1)\pi$, k je celé$\}$, $\arg(-1) = \pi$

$\mathrm{Arg}(j) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k je celé$\}$, $\arg(j) = \frac{\pi}{2}$



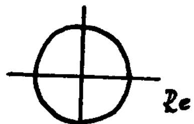
Výpočet argumentu

$\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$; $\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\varphi \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$

$\frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y > 0$ $\qquad \pi + \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, $x < 0$ $\quad (-\pi/2, 3\pi/2)$

$-\frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y < 0$

$$\arg z = 2\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}};\quad \text{pro } x<0,\ y=0 \quad \pi$$



Exponenciální tvar komplexního čísla

$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$; $\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$ — komplexní jednotka

$$\overline{e^{j\varphi}} = e^{-j\varphi};\quad \frac{1}{e^{j\varphi}} = \frac{e^{-j\varphi}}{|e^{j\varphi}|^2} = e^{-j\varphi};\quad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}e^{-j\varphi}$$

Násobení, mocnění, dělení

$$e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

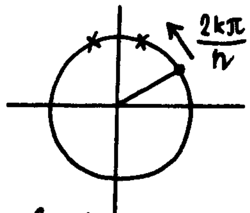
Moivreova věta

$$z^n = |z|^n e^{jn\varphi} = |z|^n(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad (n \text{ celé!})$$

Odmocnina $\sqrt[n]{z} = a \Leftrightarrow z = a^n$

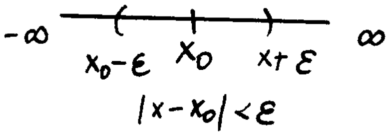
$\sqrt[n]{0} = 0$; $z \neq 0$, $z = |z| e^{j\varphi}$, $a = |a| e^{j\alpha}$, $|z| e^{j\varphi} = |a|^n e^{j\alpha n}$

$|a| = \sqrt[n]{|z|}$; $\varphi \overset{!}{=} \alpha n$, $\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

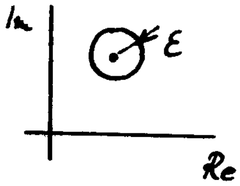


$\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{|z|}\, e^{j\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}$; $k = 0, 1, \dots, n-1$; $\sqrt[n]{z}$ - je n-značná funkce

Otevřená a uzavřená Gaussova rovina



$\mathbb{R} + \{\infty, -\infty\}$



KOMPLEXNÍ ČÍSLA NEJSOU USPOŘÁDANÁ

$\cancel{z_1 < z_2}$

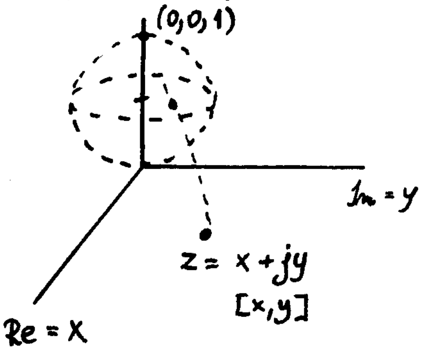
Okolí bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ je $\{z; |z - z_0| < \varepsilon\}$

Oblast - otevřená a souvislá

∞ je jeden nevlastní, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - uzavřená Gaussova rovina

$\mathcal{U}(\infty) = \{z; |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}$

Riemannova sféra



uzavřená Gaussova rovina je ekvivalentní s uzavřenou sférou.

II. POSLOUPNOSTI A ŘADY V $\mathbb{C}$ A $\overline{\mathbb{C}}$

Věta: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ v $\mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, z_n = \mathrm{Re}\, z$ v $\mathbb{R}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, z_n = \mathrm{Im}\, z$ v $\mathbb{R}$

Věta: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ v $\overline{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$ v $\mathbb{R}^*$

Operace v $\overline{\mathbb{C}}$:
$\lim a_n + b_n = \lim a_n + \lim b_n$
$\lim a_n \cdot b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n$
$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$

$z \in \mathbb{C}$:
$z + \infty = \infty$
$\infty + \infty$ - nedefinujeme
$z \cdot \infty = \infty$ $(z \neq 0)$
$0 \cdot \infty$ - nedefinujeme
$\frac{z}{\infty} = 0$ ($\frac{\infty}{\infty}$ - nedefinujeme)

$z \neq 0$, $\frac{z}{0} = \infty$ ($\frac{0}{0}$ - nedefinujeme)

Komplexní funkce

Def.: Je-li $G \subset \mathbb{C}$ a $z \in G$ je přiřazena hodnota $f(z) \in \mathbb{C}$, pak f je funkce komplexní proměnné. ($G = Df$ - def. obor; $Hf = \{w;\ w = f(z),\ z \in Df\}$)

Prostá funkce : $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

f je jednoznačná

Def*.: f je mnohoznačná funkce v G, jestliže je $z \in G$ přiřazena $f(z) \subset \mathbb{C}$.
(n-značná - $f(z)$ má n-hodnot)

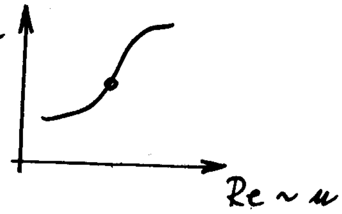
Def.: Nahradíme-li $\mathbb{C}$ množinou $\overline{\mathbb{C}}$ mluvíme o funkcích v uzavřené Gaussově rovině.

Př.: 1. $w = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$; $Df = \mathbb{C} - \{0\}$, $Hf = \mathbb{C} - \{0\}$

2. $w = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \neq 0,\ z = \infty \\ \infty, & z = 0 \\ 0, & z = \infty \end{cases}$

Speciální případy

- $Df \subset \mathbb{R}$ - f je komplexní funkce reálné proměnné.



$\forall t \in Df$ $\quad f(t) = u(t) + j v(t)$, $\ f(t) \approx (u(t), v(t))$

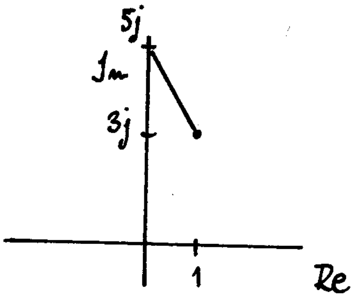
Grafem je „křivka" v rovině.

$$\begin{aligned} x &= u(t) \\ y &= v(t) \end{aligned} \quad \leftrightarrow \quad z = u(t) + j v(t)$$

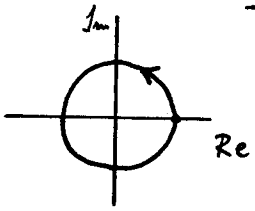
Příklad:

1. $f(t) = 1 + 2j + t(3j - 1)$, $\ 0 \leq t \leq 1$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + 3t \end{aligned}\right\} \text{úsečka}$$



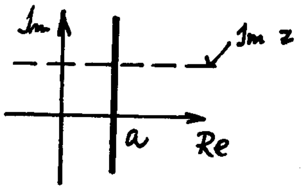
2. $f(t) = e^{jt}$, $\ 0 \leq t \leq 2\pi$



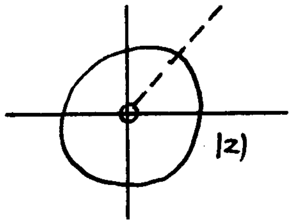
- $Df \subset \mathbb{C}$ a $Hf \subset \mathbb{R}$ - reálná funkce komplexní proměnné.

$f(z) = f(x + jy) \approx f(x, y)$, Znázornění pomocí hladin.

Příklad: 1. $f(z) = \mathrm{Re}\, z$, $\ f(z) = x$, $\ x = a$; 2. $f(z) = \mathrm{Im}\, z = y$



3. $f(z) = |z|$



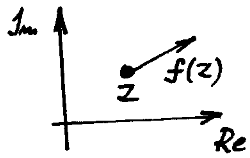
4. $f(z) = \arg z$

$Df \subset \mathbb{C},\ Hf \subset \mathbb{C}$

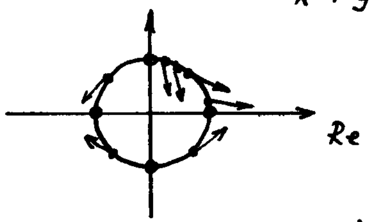
- $Df \subset \mathbb{C},\ Hf \subset \mathbb{C}$ – komplexní funkce komplexní proměnné

Znázornění:

a) Jako vektorové pole

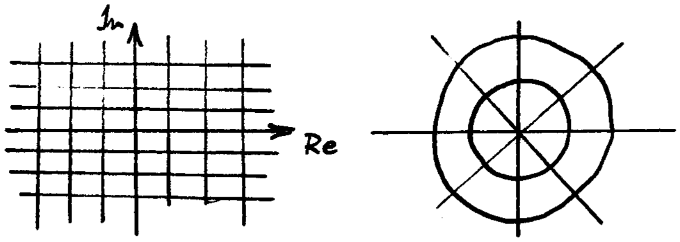


Př.: $f(z) = \frac{1}{z}$, $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$ – stálá velikost, kružnice se středem v počátku



b) Vyšetříme obraz (síť)

– vhodně zvolené sítě v $\mathbb{C}$



Př.: $f(z) = z^2$; $(x+jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy$

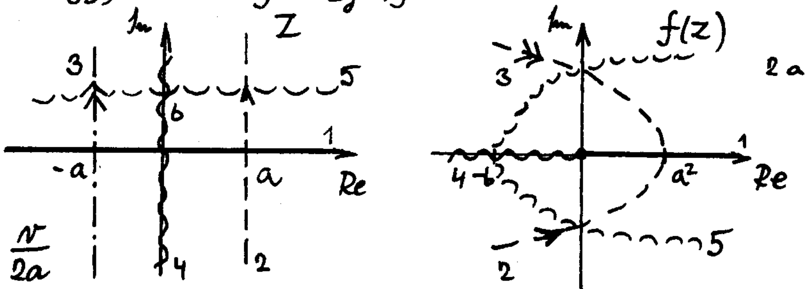
$u = x^2 - y^2$

$v = 2xy$

$u = a^2 - y^2$

$v = 2ay \Rightarrow y = \frac{v}{2a}$

$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$

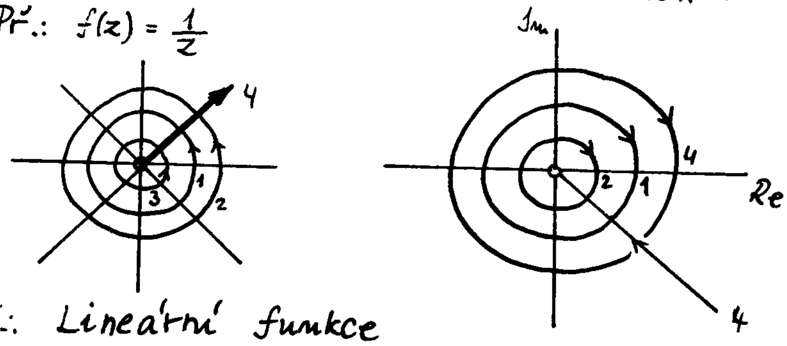


2 a 3 leží na sobě

$u = x^2 - b^2$

$v = 2bx \Rightarrow x = \frac{v}{2b}$, $u = -b^2 + \frac{v^2}{4b^2}$

Př.: $f(z) = \frac{1}{z}$



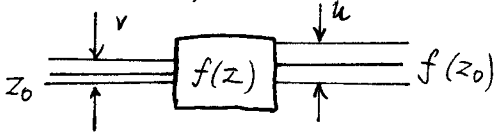
Př.: Lineární funkce

$f(z) = az + b$, $a \neq 0$

$w = az + b$ – Posloupnost $z = \frac{1}{a}(w - b)$ s koeficientem $|a|$

Limita a spojitost

Def.: Funkce $f(z)$ je spojitá v bodě $z_0 \in Df \subset \overline{\mathbb{C}}$. Bod z_0 je v def. oboru.
K libovolnému okolí $\mathcal{U}(f(z_0))$ existuje okolí $V(z_0)$ takové, že $z \in V(z_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(z) \in \mathcal{U}(f(z_0))$.



Poznámka: Platí věty o spojitosti součtu, součinu, podílu a složení jako u reálných funkcí.

Poznámka: $f(z) = u(z) + jv(z)$; $u(x+jy) \approx (x,y)$

Konečná funkce $f(z) = u(z) + jv(z)$ je spojitá $\Leftrightarrow$ jsou spojité $u(x,y)$ a $v(x,y)$.

Př.: 1. $f(z) = z$; $z = x + jy$ — f je spojitá v $\mathbb{C}$

1.* $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$ $\quad f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$

$f(\infty) = \infty$

2. $f(z) = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$

$Df = \mathbb{C}$; P je spojitá v $\overline{\mathbb{C}}$

$z^2 = z \cdot z$

3. $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$; $\quad Df = \{z;\ Q(z) \neq 0\}$, f je spojitá v Df

Def: Limita funkce — $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) + j \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z)$

Říkáme, že funkce $f(z)$ má v bodě z_0 limitu w_0 jestliže platí:

1. z_0 je hromadným bodem Df;
2. k libovolnému okolí $\mathcal{W}(w_0)$ existuje okolí $V(z_0)$ takové, že
$(z \in V(z_0) \cap Df,\ z \neq z_0) \Rightarrow f(z) \in \mathcal{U}(w_0)$; $w_0 = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

Poznámky:
1. Platí věty o limitě součtu, součinu, podílu a složení.
2. Je-li f konečná, pak $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) + j \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z)$
3. $\lim\limits_{z\to \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ v $\mathbb{R}$
4. není-li bod z_0 izolovaný bod a f je spojitá v bodě z_0, pak $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

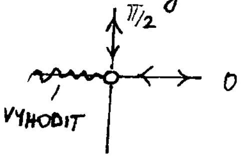
Př.:

1. $\lim\limits_{z\to\infty} z = \infty$
2. $\lim\limits_{z\to\infty} P(z) = \lim\limits_{z\to\infty} (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} z^n \left(a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \ldots + \dfrac{a_n}{z_n}\right) = \infty$
3. $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{3z+2}{z-1} = \infty \qquad \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{3z+2}{(z-1)^2} = \infty$

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{1}{z} = \infty$ — nemusí se rozlišovat levá a pravá.

4. $f(z) = \operatorname{Re} z$, $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{Re} z$ – neexistuje

5. $f(z) = \arg z$



Derivace funkce

Def.: Je-li $f: G \to \mathbb{C}$, $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, pak říkáme, že má funkce f derivaci $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ v bodě $z_0 \in G$ jestliže:

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Lineární funkci $f'(z_0)\cdot h = df(z_0, h)$ nazýváme diferenciálem funkce f v bodě z_0.

Poznámka: Pravidla pro derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce mají stejný tvar jako v $\mathbb{R}$.

Př.: 1. $f(z) = a$, $z \in \mathbb{C}$

$$f(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = 0$$

2. $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{z_0 + h - z_0}{h} = 1$$

3. $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z_0^2 + 2z_0h + h^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2z_0 + h) = 2z_0.$$

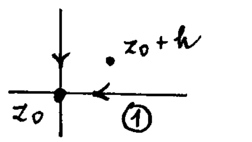
4. $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_0$, $z \in \mathbb{C}$

$$P'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \dots + a_1$$

Podmínky pro existenci derivace

$f(z) = u(z) + jv(z)$, $u(x+jy) \approx u(x,y)$, $v(x+jy) \approx v(x,y)$

$z_0 = x_0 + jy_0 \approx (x,y)$



$h = h_1 + jh_2$

$f'(z)$ existuje: $\quad f'(z_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$

1. $h_2 = 0$

1. $$f'(z_0) \underset{(h_2=0)}{=} \lim_{h_1\to 0} \frac{u(x_0+h_1, y) - u(x_0,y_0)}{h_1} + j \lim \frac{v(x_0+h_1,y_0) - v(x_0,y_0)}{h_1} = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$$

2. $$f'(z_0) = \lim_{h_2\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h_2) - u(x_0,y_0)}{jh_2} + j \lim_{h_2\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h_0) - u(x_0,y_0)}{jh_2} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - j\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}$$

Musí platit:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Věta: Cauchyovy – Riemannovy podmínky

Funkce $f(z) = u(z) + jv(z)$ má derivaci v bodě z_0 právě když platí:

1. funkce u a v mají diferenciál (spojité parciální derivace) v bodě (x_0, y_0);
2. Je $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ v bodě (x_0, y_0);

Je pak: $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial x}$

Př.: 1. $f(z) = \operatorname{Re} z$

$u(x,y) = x, \quad v(x,y) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \begin{matrix} 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix}$

2. $f(z) = \bar{z}$, $\quad u(x,y) = x$, $\quad v(x,y) = -y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \qquad 1 \neq -1$

Holomorfní funkce

Def.: Říkáme, že funkce f je holomorfní v bodě z_0, jestliže existuje derivace $f'(z)$ v nějakém okolí bodu z_0.

Funkce $f(z)$ je holomorfní v oblasti G má-li derivaci v každém bodě $z_0 \in G$ (je holomorfní v každém bodě $z \in G$

Př.: a) Polynom $P(z)$ je holomorfní v $\mathbb{C}$.

b) Racionální funkce $\frac{P(z)}{Q(z)}$ je holomorfní v $\mathbb{C} \setminus \{z;\, Q(z) = 0\}$

Sdružené harmonické funkce

$f(z) = u(z) + jv(z)$ je holomorfní v oblasti G.

Pak platí: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$ – u je harmonická v G, a rovněž v je harmonická tj. $\Delta v = 0$ v G

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

Jsou-li u a v reálná a imaginární část holomorfní funkce v oblasti G, pak u určuje v a naopak v určuje u. Pak je

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy \quad \text{a} \quad v(x,y) - v(x_0,y_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

Elementární funkce

I. EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

Def.: Pro $z \in \mathbb{C}$, $z = x + jy$ je $e^z = e^x(\cos y + j \cdot \sin y)$

Pozn. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, $e^{(x_1+x_2)}(\cos(y_1+y_2) + j\sin(y_1+y_2))$

Vlastnosti exponenciální funkce:

1. e^z je holomorfní v $\mathbb{C}$ a $(e^z)' = e^z$.
2. $e^z \neq 0$ v $\mathbb{C}$.
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
4. $e^{-z} = 1/e^z$, $e^{-z} = e^{-x}(\cos y + j\sin y)$
5. e^z je periodická s periodou $2\pi j$ $(e^z = e^{z+2k\pi j})$
6. $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
7. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ pro $z \in \mathbb{C}$

$$e^z \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\ ;\ e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^n y^n}{n!} = \left| \begin{matrix} j^{2k} = (-1)^k \\ j^{2k+1} = j(-1)^k \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

8. e^z nabývá všech hodnot z $\mathbb{C} - \{0\}$ a pás $\alpha - \pi < \operatorname{Im} z \leq \alpha + \pi$ se zobrazí na $\mathbb{C} - \{0\}$.

II. GONIOMETRICKÉ FUNKCE

a) sinus a kosinus

$$\sin z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz})\ ;\quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz})$$

1. Jsou holomorfní v $\mathbb{C}$, $(\sin z)' = \frac{1}{2j}(je^{jz} + je^{-jz}) = \cos z$,

   $(\cos z)' = \frac{1}{2}(je^{jz} - je^{jz}) = -\sin z$

2. $\sin(jy) = \frac{1}{2j}(e^{-y} - e^{y}) = j\sinh y$, $\cos(jy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \cosh y$

   $\sin z = \sin(x + jy) = \sin x \cos(jy) + \cos x \sin(jy) = \sin x \cosh y + j\cos x \sinh y$

   $\cos z = \cos x \cosh y - j\sin x \sinh y$

   Nulové body:

   $\sin z = 0$: $\sin x = 0 \wedge \sinh y = 0$
   $x = k\pi \wedge y = 0$
   $z_k = k\pi$, k je celé

   $\cos z = 0$: $\cos x = 0 \wedge \sinh y = 0$
   $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k je celé

3. sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π.
4. $\sin^2 z + \cos^2 y = 1$
5. $e^{jz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n z^n}{n!}$ $\qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$, $z \in \mathbb{C}$

   $e^{-jz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-j)^n z^n}{n!}$ $\qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$

b) tangens a kotangens

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{j(e^{jz} + e^{-jz})} = \frac{e^{2jz} - 1}{j(e^{2jz} + 1)}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{j(e^{jz} + e^{-jz})}{e^{jz} - e^{-jz}} = \frac{j(e^{2jz} + 1)}{e^{2jz} - 1}, \quad z \neq k\pi$$

1. Jsou to holomorfní funkce, $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$ a $(\operatorname{cotg} z)' = \frac{-1}{\sin^2 z}$

III. HYPERBOLICKÉ FUNKCE

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}); \quad \cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$

1. Jsou holomorfní v $\mathbb{C}$. $(\sinh z)' = \cosh z$, $(\cosh z)' = \sinh z$
2. $\sinh(jy) = +j \sin y$ $\quad$ $\sinh(jz) = j \sin z$ $\quad$ $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = jk\pi$
   $\cosh(jy) = \cos y$ $\quad$ $\cosh(jz) = \cos z$ $\quad$ $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = j(\frac{\pi}{2} + k\pi)$
3. $\sinh z$ a $\cosh z$ jsou periodické s periodou $2\pi j$ $\quad$ k je celé

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \quad z \neq j(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

$$\operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, \quad z \neq jk\pi$$

Inverzní funkce

Def.: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, říkame, že f je prostá v $Df \Leftrightarrow z_1 \neq z_2,\ z_1, z_2 \in Df \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

f je prostá $f: Df \to Hf$

$w = f(z) \quad z \leftrightarrow w$

$w = f^{-1}(z) \Leftrightarrow z = f(w)$ – f má inverzní funkci f^{-1} $(z \in Df^{-1} = Hf,\ w \in Hf^{-1} = Df)$

Pro funkce v $\mathbb{C}$ připouštime mnohoznačné funkce

Je-li $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(f(z) \subset \mathbb{C})$, pak inverzní funkce f^{-1} definujeme jako množinu řešení rovnice: $w = f^{-1}(z) \Leftrightarrow z = f(w)$

Věta: O derivaci inverzní funkce

Je-li f holomorfní a prostá v oblasti G a $f'(z) \neq 0$ pro $z \in \mathbb{C}$, pak f^{-1} je holomorfní.

označme: $\left.\begin{array}{l} w_0 = f(z_0);\ w = f(z) \\ f^{-1}(w_0) = z_0;\ z = f^{-1}(w) \end{array}\right\}$ je vzájemně jednoznačné

$$(f^{-1}(w_0))' = \lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \left| \begin{array}{l} w = f(z) \\ w_0 = f(z_0) \end{array} \right| = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

1. n-tá odmocnina

$\sqrt[n]{z} = w \Leftrightarrow z = w^{n};\ w = z^{1/n}$

$\sqrt[n]{z}$ je n-značná pro $z \neq 0$;

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{(w^{n})'} = \frac{1}{n \cdot w^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot z^{1 - 1/n}} = \frac{1}{n} \cdot z^{\frac{1}{n} - 1}, \quad z \neq 0$$

II. Logaritmus

je definován jako inverzní k exponenciální funkci. Protože je e^z periodická je logaritmus mnohoznačnou funkcí.

$$\mathrm{Log}\, z = w \Leftrightarrow z = e^w, \quad z \neq 0$$

$w = u + jv; \quad z = x + jy$

$x + jy = e^u(\cos v + j\sin v)$

$e^u = |z|$ a $v \in \mathrm{Arg}\, z$, $u = \ln|z|$

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + j\,\mathrm{Arg}\, z$$

Hlavní hodnota logaritmu je funkce $\log z = \ln|z| + j\arg z \; (-\pi < \arg z < \pi)$.

Jiná volba $-u$ a v. $\log_\alpha z = \ln|z| + j\varphi; \quad \varphi \in \mathrm{Arg}\, z, \quad \alpha - \pi < \varphi < \alpha + \pi$

Jednoznačná větev

$\log z$ či $\log_\alpha z$ je holomorfní, neboť $(\log_\alpha z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$

Příklady

1. $\mathrm{Log}\,(1+j) = \ln\sqrt{2} + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

   $\log\,(1+j) = \ln\sqrt{2} + j\frac{\pi}{4}$

2. $\log\,(j) = \ln 1 + j\frac{\pi}{2} = j\frac{\pi}{2}$

III. Cyklometrické funkce

1. $\mathrm{Arcsin}\, z = w \Leftrightarrow z = \sin w$

   $z = \frac{1}{2j}\left(e^{jw} - e^{-jw}\right) \;\Big|\; 2je^{jw}$

   $(e^{jw})^2 + 2jze^{jw} - 1 = 0$

   $e^{jw} = +jz \pm \sqrt{-z^2+1}$

   $w = -j\,\mathrm{Log}\left(+jz \pm \sqrt{1-z^2}\right); \quad z \in \mathbb{C}$

2. $\mathrm{Arccos}\, z = w \quad (\Leftrightarrow z = \cos w)$

   $z = \frac{1}{2}\left(e^{jw} + e^{-jw}\right)$

   $(e^{jw})^2 = 2ze^{jw} + 1 = 0$

   $e^{jw} = z \pm \sqrt{z^2-1}$

   $w = -j\,\mathrm{Log}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right); \quad z \in \mathbb{C}$

3. $\mathrm{Arctg}\, z = w \quad (z = \mathrm{tg}\, w)$

   $z = \dfrac{e^{2jw}-1}{j(e^{2jw}+1)}$

   $e^{2jw} \cdot jz + jz = e^{2jw} - 1$

   $e^{2jw} = \dfrac{-jz-1}{jz-1} = \dfrac{z-j}{-z-j}$

   $w = -\frac{j}{2}\,\mathrm{Log}\left(\frac{z-j}{-z-j}\right), \quad z \neq \pm j$

4. $\operatorname{Arccotg} z = w$

$$z = \operatorname{cotg} w = \frac{(e^{jw}+e^{-jw})j}{e^{2jw}-1} = \frac{j(e^{2jw}+1)}{e^{2jw}-1}$$

$$ze^{2jw} - z = je^{2jw} + j$$

$$e^{2jw} = \frac{j+z}{z-j}$$

$$w = -\frac{j}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{z+j}{z-j}\right); \quad z \neq \pm j$$

IV. Hyperbolometrické funkce

1. $\operatorname{Arg\,sinh} z = w$

$$z = \sinh w$$

$$z = \frac{1}{2}(e^{w} - e^{-w})$$

$$(e^{w})^2 - 2ze^{w} - 1 = 0$$

$$e^{w} = z \pm \sqrt{z^2+1}$$

$$w = \operatorname{Log}\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right); \quad z \in \mathbb{C}$$

2. $\operatorname{Arg\,cosh} z = w$

$$z = \cosh w = \frac{1}{2}(e^{w}+e^{-w})$$

$$(e^{w})^2 - 2ze^{w} + 1 = 0$$

$$e^{w} = z \pm \sqrt{z^2-1}$$

$$w = \operatorname{Log}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

3. $\operatorname{Arg\,tgh} z = w$

$$z = \operatorname{tgh} w = \frac{e^{2w}-1}{e^{2w}+1}$$

$$e^{2w}z + z = e^{2w-1}$$

$$e^{2w} = \frac{-z-1}{z-1} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$w = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right); \quad z \neq \pm 1$$

4. $\operatorname{Arg\,cotgh} z = w$

$$z = \operatorname{cotgh} w = \frac{e^{2w}+1}{e^{2w}-1}$$

$$ze^{2w} - z = e^{2w} + 1$$

$$e^{2w} = \frac{z+1}{z-1}$$

$$w = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(\frac{z+1}{z-1}\right); \quad z \neq \pm 1$$

Komplexní funkce reálné proměnné

Křivka, cesta

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}; \; f(t) = u(t) + jv(t)$

$f'(t) = u'(t) + jv'(t); \; \int f(t)\,dt = \int u(t)\,dt + j\int v(t)\,dt$

Křivka v $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{C} = \{(x,y);\; x = \varphi_1(t),\; y = \varphi_2(t);\; t \in \langle a,b\rangle\}$

KŘIVKA : $\mathcal{C} = \{z;\ z = \mathcal{C}(t);\ t \in \langle a, b\rangle\}$

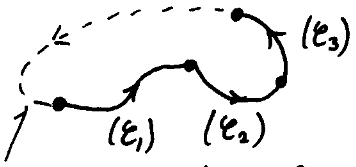
$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}_1(t) + j\,\mathcal{C}_2(t)$ $\qquad z = \mathcal{C}(t);\ t \in \langle a, b\rangle$

$\mathcal{C}'(t) = \mathcal{C}_1'(t) + j\,\mathcal{C}_2'(t)$ $\qquad$ – parametrická rovnice křivky

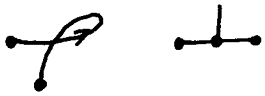
Orientace – jako v $\mathbb{R}^2$

$(\mathcal{C})$ – orientovaná křivka (oblouk)

Cesta $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) + (\mathcal{C}_2) + \ldots + (\mathcal{C}_n)$



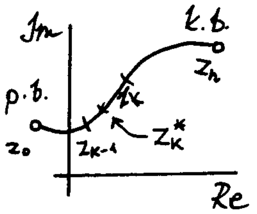
nesmíme :



je možné se vrátit, ale nesmí se protnout

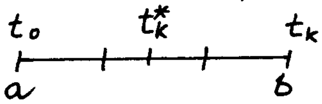
Definice integrálu

$(\mathcal{C})$ je orientovaný oblouk v oblasti G; $f: G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, $f(z) = u(z) + v(z)$;



dělení $\mathcal{D}$ je volba bodů po řadě za sebou na oblouku $(\mathcal{C})$.

$\mathcal{D} = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$, $z_k = \varphi(t_k)$, $\varphi = \{z;\ z = \varphi(t),\ a \le t \le b\}$



$t_{k_1} \le t_k^* \le t_k$, $z_k^* = \varphi(t_k^*)$

$S(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)(z_k - z_{k-1})$ – integrální součet funkce příslušný dělení $\mathcal{D}$.

$\|\mathcal{D}\| = \max\{|z_k - z_{k-1}|;\ k = 1, \ldots, n\}$

Integrál funkce f po oblouku $(\mathcal{C})$ definujeme jako číslo

$$\int_{(\mathcal{C})} f(z)\,dz = \lim_{\|\mathcal{D}\| \to 0} S(\mathcal{D})$$

Výpočet a existence integrálu $\qquad \varphi(t) = \varphi_1(t) + j\varphi(t)$

$$S(\mathcal{D}) = \sum_{k=1}^{n} \Big(u(\varphi(t_k^*)) + jv(\varphi(t_k^*))\Big)\Big[\big(\varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_{k-1})\big) + j\big(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_k - 1)\big)\Big] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Big[u(\varphi(t_k^*))\big(\varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_{k-1})\big) - v(\varphi(t_k^*))\big(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})\big) +$$

$$+ j\sum_{k=1}^{n} \Big[v(\varphi(t_k^*))\big(\varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_{k-1})\big) + u(\varphi(t_k^*))\big(\varphi_2(t_k) - \varphi_2(t_{k-1})\big)\Big]$$

$S(\mathcal{D})$ je integrálním součtem integrálů

$$\int_{(\mathcal{C})} u\,dx - v\,dy + j\int_{(\mathcal{C})} v\,dx + u\,dy \overset{!}{=} \int_{(\mathcal{C})} (u + jv)(dx + j\,dy)$$

Závěr: Je-li f spojitá funkce na oblouku $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} = \{z;\ z = \varphi(t),\ a \le t \le b\}$,

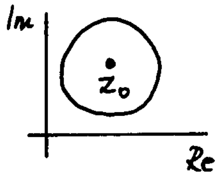
pak integrál existuje a $\int_{(\mathcal{C})} f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$; $\quad \varphi'(t) = \varphi_1'(t) + j\varphi_2'(t)$

$$\int_a^b \Big[u(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) - v(\varphi_1(t))\,\varphi_2'(t) + j\big[v(\varphi(t)) \cdot \varphi_1'(t) + u(\varphi(t))\,\varphi_2'(t)\big]\Big]\,dt$$

Poznámka: Počítáme tedy takto

$$\int_{(\varphi)} f(z)\,dz = \left| \begin{matrix} z = \varphi(t) \\ dz = \varphi'(t)\,dt \end{matrix} \right| = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

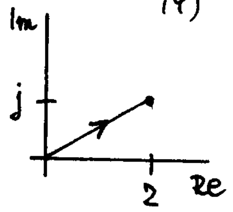
Příklad: $\varphi = \{ z,\ |z - z_0| = r \}$



$$\int_{(\varphi)} (z-z_0)^n\,dz = \left| \begin{matrix} z = z_0 + re^{jt},\ 0 \le t \le 2\pi \\ dz = rje^{jt}\,dt \end{matrix} \right| = \int_0^{2\pi} r^n \cdot e^{jnt} \cdot rje^{jt}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} r^{n+1}\, j e^{j(n+1)t} dt = \begin{cases} \dfrac{r^{n+1}}{n+1} \left[e^{jt(n+1)} \right]_0^{2\pi} = 0, & n \neq -1 \\ j \displaystyle\int_0^{2\pi} dt = 2\pi j, & n = -1 \end{cases}$$

Příklad: $\int_{(\varphi)} z \operatorname{Re} z\,dz$; φ je úsečka $\langle 0; 2+j \rangle$



$z = 0 + t(2 + j - 0),\ t \in \langle 0, 1 \rangle$

$dz = (2+j)\,dt$

$$\int_{(\varphi)} z \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^1 (2+j)t \cdot 2t \cdot (2+j)\,dt = 2(2+j)^2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 2(4 - 1 + 4j) \cdot \frac{1}{3} = 2 + \frac{8}{3}j$$

Vlastnosti integrálu

i. $\displaystyle\int_{(\varphi)} (\alpha f(z) + \beta g(z))\,dz = \alpha \int_{(\varphi)} f(z)\,dz + \beta \int_{(\varphi)} g(z)\,dz$

ii. $\displaystyle\int_{(\varphi)} f(z)\,dz = -\int_{(-\varphi)} f(z)\,dz$

iii. $\displaystyle\int_{(\varphi)} 1\,dz = \text{k.b.}(\varphi) - \text{p.b.}(\varphi)$

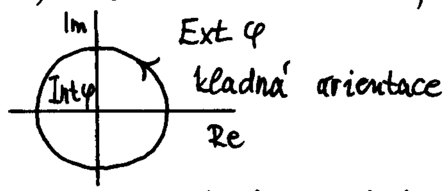
$\varphi = \{ z;\ z = \varphi(t),\ a \le t \le b \}$, $\displaystyle\int_{(\varphi)} 1\,dz = \int_a^b \varphi'(t)\,dt = \left[\varphi(t) \right]_a^b = \underset{\text{KONCOVÝ BOD}}{\varphi(b)} - \underset{\text{POČÁTEČNÍ BOD}}{\varphi(a)}$

iv. $\displaystyle\left| \int_{(\varphi)} f(z)\,dz \right| \le \max \{ |f(z)|;\ z \in \varphi \} \cdot s(\varphi)$

$\displaystyle\left| \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \right| \le \int_a^b |f(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)|\,dt \le \operatorname{Max} \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$, $|\varphi'(t)| = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + (\varphi_2'(t))^2}$

Cauchyova věta

(φ) – Jordanova cesta, uzavřená



Věta: Nechť f je holomorfní v oblasti $G \subset \mathbb{C}$ a φ je Jordanova cesta taková, že $(\varphi \cup \operatorname{Int} \varphi) \subset G$. Pak

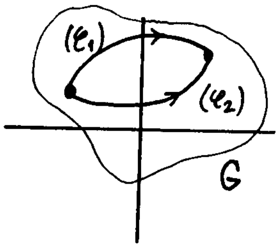
$$\int_{(\varphi)} f(z)\,dz = 0$$

Důkaz: $\displaystyle\int_{(\mathcal{C})} f(z)\,dz = \int_{(\mathcal{C})} u\,dx - v\,dy + j\int_{(\mathcal{C})} v\,dx + u\,dy = \left|\begin{matrix}\text{PODLE GREENOVY}\\ \text{FORMULE}\end{matrix}\right| =$

$$= \iint_{\mathrm{Int}\,\mathcal{C}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + j\iint_{\mathrm{Int}\,\mathcal{C}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 + 0j = 0$$

Důsledky:

1. Nechť f je holomorfní v jednoduše souvislé oblasti G, pak integrál funkce f závisí pouze na p.b. a k.b. a nezávisí na tvaru cesty:



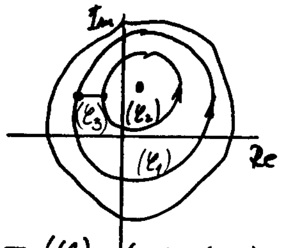
$(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) + (-\mathcal{C}_2)$

$\displaystyle\int_{(\mathcal{C})} f(z)\,dz = 0$

$\displaystyle\int_{(\mathcal{C}_1)} f(z)\,dz + \int_{(-\mathcal{C}_2)} f(z)\,dz = \int_{(\mathcal{C}_1)} f(z)\,dz - \int_{(\mathcal{C}_2)} f(z)\,dz$

Lze tedy změnit cestu při zachování krajních bodů pokud nenarazíme na bod, kde f není holomorfní.

2. f je holomorfní v oblasti $G - \{z_0\}$



$(\mathcal{C}_1)$ a $(\mathcal{C}_2)$ jsou kladně orientované takové, že $\mathrm{Int}\,\mathcal{C}_1 \subset G$, $\mathrm{Int}\,\mathcal{C}_2 \subset G$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\,\mathcal{C}_1$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\,\mathcal{C}_2$.

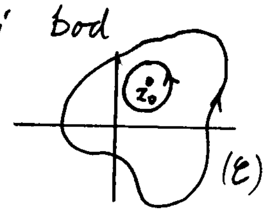
$\displaystyle\int_{(\mathcal{C}_1)} f(z)\,dz = \int_{(\mathcal{C}_2)} f(z)\,dz$

Jordanova – $(\mathcal{C}) = (\mathcal{C}_1) + (\mathcal{C}_3) + (-\mathcal{C}_2) + (-\mathcal{C}_3)$

$\displaystyle\int_{(\mathcal{C})} f(z)\,dz = 0$

Speciálně lze volit: $\mathcal{C}_2 = \{z;\ |z - z_0| = \varepsilon\}$, kde ε je libovolně malé.

Příklad: $(\mathcal{C})$ je kladně orientovaná uzavřená cesta, pak pro každý bod $z_0 \in \mathrm{Int}\,\mathcal{C}$ je $\displaystyle\int_{(\mathcal{C})} \frac{1}{z - z_0}\,dz = 2\pi j$ a $\displaystyle\int_{(\mathcal{C})} (z - z_0)^n\,dz = 0$, $n \neq -1$.



Cauchyův vzorec

Věta: f je holomorfní v oblasti G a $(\mathcal{C})$ je kladně orientovaná Jordanova cesta taková, že $(\mathcal{C} \cup \mathrm{Int}\,\mathcal{C}) \subset G$. Potom pro každý bod $z_0 \in \mathrm{Int}\,\mathcal{C}$ je

$$\int_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi j\, f(z_0)$$

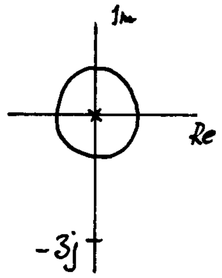
Důkaz: Definujme $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \\ f'(z_0), & z = z_0 \end{cases}$

g je holomorfní v $G - \{z_0\}$ a spojitá v G. Pak $\displaystyle\int_{(\mathcal{C})} g(z)\,dz = \int_{(k_\varepsilon)} g(z)\,dz$, kde $k_\varepsilon = \{z;\ |z - z_0| = \varepsilon\}$

$$\int_{(\mathcal{C})} g(z)\,dz = \int_{(\mathcal{C})} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz = \int_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \int_{(\mathcal{C})} \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,dz = \int_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0)\cdot 2\pi j$$

Funkce g je spojitá, tedy omezená na množině $\{z;\ |z - z_0| \leq \varepsilon_0\}$.

Je-li $M = \max\{|g(z)|;\ z\}$, pak $\left|\int\limits_{(k_\varepsilon)} g(z)\,dz\right| \le M\cdot 2\pi\varepsilon$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, ale
$\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} 2\pi\varepsilon\cdot M = 0 \Rightarrow \int\limits_{(\mathcal{C})} g(z)\,dz = \int\limits_{(k_\varepsilon)} g(z)\,dz = 0$



Využití pro výpočet integrálů

Př. 1.: $\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{e^{z^2}+3}{z^2+3jz}\,dz;\quad \mathcal{C} = \{z;\ |z|=1\}$

$$\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{e^{z^2}+3}{z^2+3jz} = \int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{\frac{e^{z^2}+3}{z+3j}}{z}\,dz = \left| \begin{array}{l} z_0 = 0 \\ f(z) = \frac{e^{z}+3}{z+3j} \end{array} \right| = 2\pi j \left[\frac{e^{z^2}+3}{z+3j}\right]_{z=0} = 2\pi j\,\frac{1+3}{3j} = \frac{8}{3}\pi$$

Př. 2.: $\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{e^{z}\cdot\cos\pi z}{z^2+2z}\,dz;\quad \mathcal{C} = \{z;\ |z|=3\}$

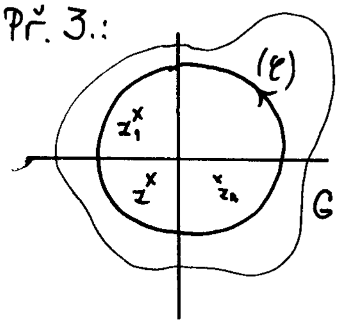
$$\frac{1}{z(z+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{-\frac{1}{2}}{z+2};\quad \int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{e^z\cos\pi z}{z(z+2)}\,dz = \int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{\frac{1}{2}e^z\cos\pi z}{z}\,dz - \int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{\frac{1}{2}e^z\cos\pi z}{z+2}\,dz =$$

$$= 2\pi j\left\{\left[\tfrac{1}{2}e^z\cos\pi z\right]_{z=0} - \left[\tfrac{1}{2}e^z\cos\pi z\right]_{z=-2}\right\} = 2\pi j\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-2}\right)$$

BEZ PARCIÁLNÍCH ZLOMKŮ

$$\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{e^z\cos\pi z}{z^2+2z}\,dz = 2\pi j\left\{\left[\frac{e^z\cos\pi z}{z+2}\right]_{z=0} + \left[\frac{e^z\cos\pi z}{z}\right]_{z=-2}\right\} = 2\pi j\left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{-2}\right)$$

Př. 3.:



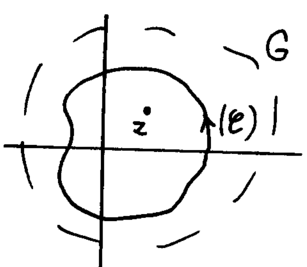
$$\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)}{(z-z_1)\dots(z-z_n)}\,dz = \int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi j\sum_{k=1}^{n}\frac{f(z_k)}{Q_k(z_k)} = 2\pi j\sum_{k=1}^{n}\frac{f(z_k)}{Q'(z_k)}$$

Q má jednoduché kořeny $z_1,\dots,z_n$ a všechny jsou v $\mathrm{Int}\,\mathcal{C}$.
f je holomorfní v G a $(\mathcal{C}\cup\mathrm{Int}\,\mathcal{C})\subset G$

$(z-z_k)\cdot Q_k(z) = Q(z)$, $\quad Q_k(z) + (z-z_k)Q_k'(z) = Q'(z)$

$z = z_k \qquad Q_k(z_k) = Q'(z_k)$

Cauchyův vzorec pro derivaci



f je holomorfní v G;
$(\mathcal{C}\cup\mathrm{Int}\,\mathcal{C})\subset G$ a $(\mathcal{C})$ je kladně orientovaná

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f(w)}{(w-z)^n}\,dw,\quad z\in\mathrm{Int}\,\mathcal{C}$$

Pak funkce Φ je holomorfní v $\Phi'(z) = \frac{n}{2\pi j}\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f(w)}{(w-z)^{n-1}}\,dw$

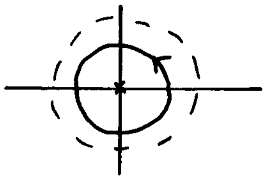
Důsledek: $f(z) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw,\quad (f'(z))' = \frac{2}{2\pi j}\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f(w)}{(w-z)^3}\,dw = f''(z)$$

Věta: Holomorfní funkce v oblasti G má v G derivaci všech řádů. Platí pro ně:

I. $f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f^{(n)}(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad$ II. $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\int\limits_{(\mathcal{C})} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

Příklad: $\displaystyle\int_{(\mathcal{C})} \frac{\cos\frac{\pi}{z+3}}{z^3}\,dz$, $\mathcal{C}=\{z;\ |z|=1\}$



$z_0=0$

$n+1=3 \Rightarrow n=2$

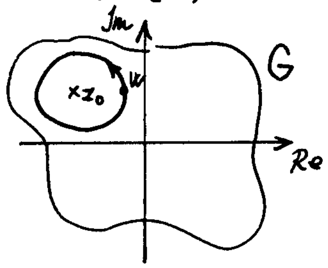
$f(z)=\cos\frac{\pi}{z+3}$

$$I=\frac{2\pi j}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{z+3}\right)''\right]_{z=0}=\frac{\pi j}{1}\left[\left(\sin\frac{\pi}{z+3}\cdot\frac{\pi}{(z+3)^2}\right)'\right]_{z=0}=$$
$$=\pi j\left[\cos\frac{\pi}{z+3}\cdot\frac{-\pi^2}{(z+3)^4}+\sin\frac{\pi}{z+3}\cdot\frac{-2\pi}{(z+3)^3}\right]_{z=0}=$$
$$=-\frac{\pi^2 j}{27}\left(\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\right)$$

Taylorova věta

Věta: Nechť f je holomorfní v oblasti $G\subset\mathbb{C}$, $z_0\in G$ a $K=\{z,\ |z-z_0|=r\}$ leží v G. Potom pro $z\in K$ je

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$



KRUŽNICE

$(K)=\{z;\ z=z_0+re^{jt},\ t\in\langle 0,2\pi\rangle\}$

Pro $z\in K_r$ je

$$f(z)=\frac{1}{2\pi j}\int_{(K)}\frac{f(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi j}\int_{(K)}\frac{f(w)}{(w-z_0)-(z-z_0)}\,dw=\frac{1}{2\pi j}\int_{(K)}\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}\,dw=$$
$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{(K)}\left(\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k\right)dw=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi j}\int_{(K)}\frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{k+1}}\right)(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

Poznámka: Je-li f holomorfní v oblasti G, $z_0\in G$ a pro z takové, že kruh $|z-z_0|<r$ je částí G je

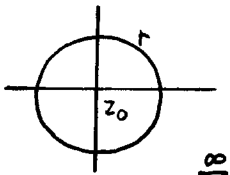
$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,\quad |z-z_0|<r$$

kde $a_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_{(\mathcal{C})}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw$, křivka $(\mathcal{C})$ je kladně orientovaná uzavřená cesta taková, že $z_0\subset \operatorname{Int}\mathcal{C}\subset G$.

Příklad: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z}$, $|z|<1$; $\displaystyle e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$

Věta: Je-li $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)$ pro $|z-z_0|<r$, pak $f(z)$ je holomorfní v kruhu $|z-z_0|<r$.

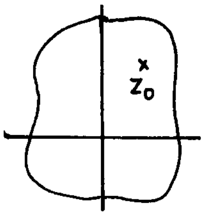
Důkaz:



Věta: Je-li $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)$ pro $|z-z_0|<r$, pak $f^{(n)}(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}$ pro $|z-z_0|<r$.

Pozn.: Lze zaměnit derivování se sčítáním v kruhu, kde je řada konvergentní.

Poznámka: f je holomorfní v oblasti G, $z_0 \in G$



$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-1}$$

a) $f(z_0) \neq 0$

1. $f(z) \neq 0$ pro nějaké okolí

b) $f(z_0) = 0$, pak

1. $f(z) = (z-z_0)^n \cdot g(z)$ a $g(z_0) \neq 0$
2. $f(z) = 0$ v G

Pro 1. n je řád nulového bodu $\Leftrightarrow f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0;\ f^{(n)} \neq 0$.

Podíl $\frac{f(z)}{g(z)}$ není holomorfní pouze v jednotlivých bodech (izolovaných) oblasti G.

Je-li z_0 takový bod, $g(z_0) = 0$ pak $\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z-z_0)^n \cdot g(z)}$, $g(z_0) \neq 0$; $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty$.

POČET PRAVDĚPODOBNOSTI

Teorie pravděpodobnosti – matematická statistika

Úvod

Deterministické procesy – Ohmův zákon, Newtonovy zákony

Náhodné procesy – opakováním za stejných podmínek dávají různé výsledky.

Náhodný jev

Náhodný pokus je proces, který při opakování za stejných podmínek dává různé výsledky. Různé výsledky tohoto pokusu nazýváme náhodné jevy. Množinu všech možných výsledků náhodných jevů se nazývá jevové pole.

Značení: $\mathcal{S}$ – jevové pole; náhodné jevy, prvky $\mathcal{S}$ … $A, B, C, \ldots, U, V$;

Příklady:

1. Hod hrací kostkou; sledujeme počet bodů $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. Házení mincemi; sledujeme Rub $\equiv 0$, Líc $\equiv 1$
   $\mathcal{S} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
3. Házíme dokud nepadne rub; $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
4. Loterie obsahující N losů a M vyhrává. Jev - počet losů, které vyhrávají z těch co zakoupíme (k koupíme)
   $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, \min(k, M)\}$
5. Doba chodu zařízení bez poruchy
   $\mathcal{S} = \{t;\ t \geq 0\}$

Struktura jevového pole, Operace s jevy

Def.: Jev jistý je jev který vždy nostane – U.

Def.: Jev nemožný – V – jev který nikdy nenastane.

Def.: Jev opačný – $A \in \mathcal{S}$, pak opačný jev $\bar{A} \in \mathcal{S}$ je jev, který nastane vždy když nenostane A.

$\bar{U} = V, \quad \bar{V} = U$

Def.: Implikace: $A, B \in \mathcal{S}$, pak jev A má za následek jev B, $A \subset B$, jestliže jev B nastane kdykoliv nostane jev A. $V \subset A \subset U$.

Def.: Rovnost jevů: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ a $B \subset A$

Def.: Sjednocení jevů: $A \cup B$ je jev, který nostane vždy když nostane jev A nebo B.

$A \cup V = A, \quad A \cup U = U, \quad A \cup \bar{A} = U, \quad A \cup B = B \cup A$

Platí asociativní zákon: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Def.: Průnik jevů: $A \cap B$ je jev který nastane vždy, když nostane jev A i B.

$A \cap V = V, \quad A \cap U = A, \quad A \cap \bar{A} = V, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Def.: Rozdíl jevů: $A - B$ je jev, který nostane vždy, když nostane jev A a nenostane jev B. $A - A = V$, $A - V = A$, $\bar{A} = U - A$

Def.: Disjunktní jevy: jsou to jevy, které se navzájem vylučují $A \cap B = V$

NEPLÉST S NEZÁVISLOSTÍ JEVŮ.

Elementární jev je jev, který nelze dále rozložit. Platí: $A \cap E = E$ nebo $A \cap E = V$, $A = \mathcal{S}$.

Definice pravděpodobnosti

$\mathcal{S}$ je jevové pole, pak pravděpodobností jevu je číslo $P(A)$, které ~~výskytu~~ popisuje míru výskytu jevu $A \in \mathcal{S}$.

Tedy pravděpodobnost P je funkce na jevovém poli taková, že platí:

1. $P : \mathcal{S} \leftrightarrow \langle 0, 1 \rangle$; $0 \leq P(A) \leq 1$, $A \in \mathcal{S}$
2. $P(U) = 1$; $P(V) = 0$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $A \cap B = V \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Def.: Klasická definice pravděpodobnosti

$\mathcal{S}$ je jevové pole generované elementárními jevy $E_1, \dots, E_n$, které mají stejnou pravděpodobnost $P(E_i) = \frac{1}{n}$. Je-li $A = \bigcup_{k=1}^{m} E_{i_k}$, pak $P(A) = \frac{m}{n}$ je poměr počtu možností příznivých jevu A ku počtu všech možností.

Příklad: 1. Hod hrací kostkou. E_i – padne i bodů, $P(E_i) = \frac{1}{6}$

A – padne sudé číslo – $\{2, 4, 6\} \Rightarrow 3$; $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B – padne číslo ≤ 4 – $\{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow 4$; $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Př.: 2. Házení dvěma mincema. $E_i - (i,j) \dots 4$, $P(E_i) = \frac{1}{4}$

A … oba ruby $(0,0) \Rightarrow 1$, $P(A) = \frac{1}{4}$

B … obě strany stejné $(0,0),(1,1) \Rightarrow 2$, $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Př.: 3. V osudí je b - bílých a c - černých koulí a jsou stejné.

E_i - složení i-té koule, $P(E_i) = \dfrac{1}{b+c}$

A - náhodně tažená je bílá $P(A) = \dfrac{b}{b+c}$

Poznámka - Statistická definice

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m(n)}{n}$$

Geometrická pravděpodobnost.

$\mathcal{S}$ je systém některých podmnožin množiny $U \subset R^n$ s konečným objemem.

Je-li $A \in \mathcal{S}$, pak $P(A) = \dfrac{v(A)}{v(U)}$

Př.: V intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ volíme náhodně bod x; A je jev $x \in \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \rangle$

$$P(A) = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1-0} = \frac{1}{4}$$

Př.: Schůzku máme domluvenou mezi 12 a 13 hod a oba přicházíme náhodně. Čekáme nejvýše 1/4 hod. Jaká je pravděpodobnost setkání.

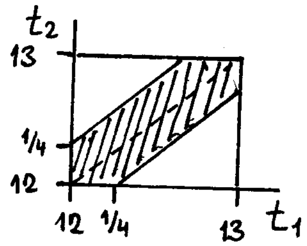
t_1 – příchod 1.

t_2 – příchod 2.

Setkání:

$$|t_1 - t_2| < \frac{1}{4}$$

$$P_S = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1} = \frac{7}{16}$$



Axiomatická definice pravděpodobnosti (Kolmogorov 1926-1930)

Def.: $\mathcal{S}$ je jevové pole, které je množinovou σ-algebrou. Pravděpodobnost P na jevovém poli $\mathcal{S}$ je funkce pro kterou platí:

1. $A \in \mathcal{S} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(U) = 1$;
3. $A \cap B = V \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

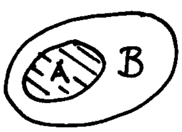
Vlastní pravděpodobnosti

4. monotonie : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;

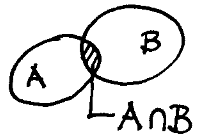
$A \subset B \Rightarrow B = (A \cup (B-A))$

$A \cap B - A = V$

$P(B) = P(A) + \overbrace{P(B-A)}^{\geq 0}$



5. $A \subset B \Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$;
6. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $\bar{A} = U - \bar{A}$, $U \subset A$



8. $P(V) = 0$;

9. aditivita: $A_i \cap A_j = V,\ i \neq j$ pak $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$;

10. $A_i \cap A_j = 1,\ i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$;

11. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$;

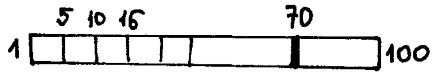
12. $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Rightarrow P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$;

Podmíněná pravděpodobnost

$P \ldots \mathcal{S}$

Zkoumáme pravděpodobnost P jevů z $\mathcal{S}$ za podmínky, že nastal nějaký jev – hypotéza.

Př.: $\mathcal{S}$ – volíme náhodné číslo mezi 1 a 100.



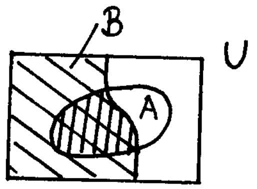
A – číslo je dělitelné 5; hypotéza B – číslo je menší než 70.

podmíněný jev A/B – číslo je dělitelné 5, ale bylo menší než 70.

$$P(A/B) = \frac{13}{69} \qquad P(A \cap B) = \frac{13}{100} \qquad P(B) = \frac{69}{100} \qquad P(A/B) = \frac{\frac{13}{100}}{\frac{69}{100}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Def.: Podmíněná pravděpodobnost P_B je pravděpodobnost jevů A/B, že nastal jev B,

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



Jevové pole pro P_B je $\mathcal{S}_B = \{A \cap B;\ A \in \mathcal{S}\}$

Poznámka: Častěji se vzorec pro $P(A/B)$ používá ve tvaru

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Př.: Máme 100 žárovek a náhodně vybereme 2. Ve 100ce je 9 vadných. Jaká je pravděpodobnost vadné dvojice – A ?

$$P(A) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{9 \cdot 8}{100 \cdot 99}$$

B – vybraná je vadná

$$P(B) = \frac{9}{100}; \quad P(A/B) = \frac{8}{99}$$

Nezávislost jevů

$P \ldots \mathcal{S}$; $A, B \in \mathcal{S}$

Def.: Řekneme, že jev A nezávisí na B jestliže $P_B(A) = P(A/B) = P(A)$

Platí:
$$P_A(B) = P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

A nezávisí na $B \Leftrightarrow B$ nezávisí na A

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

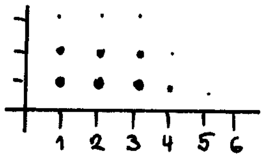
Věta: Jevy A a B jsou nezávislé právě tehdy, když je splněna jedna z ekvivalentních podmínek:

1. $P(A/B) = P(A)$; 2. $P(B/A) = P(B)$; 3. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Vsuvka: Házím kostkou ① [2] ③ [4] ⑤ [6]

A – ○, B – □ ; A a B jsou disjunktní

Házíme dvakrát. Hody nezávislé!!



– jsme na kartézském součinu

Př.: Stroj vyřezává obdélníky – 200 kusů.

tolerance jen v délce – porušena 10 ks
tolerance jen v šířce – porušena 15 ks
oba směry mimo toleranci 43 ks

A – délka mimo toleranci
B – šířka mimo toleranci

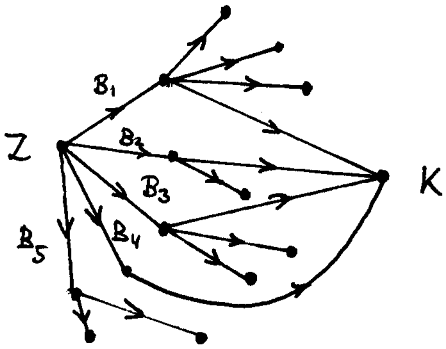
1. Jsou A a B závislé?

A … $43 + 10 = 53$; $P(A) = \frac{53}{200} = 0{,}265$
B … $43 + 15 = 58$; $P(B) = \frac{58}{200} = 0{,}29$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $\frac{43}{200} \neq \frac{53}{200} \cdot \frac{58}{200}$

Vzorec pro úplnou pravděpodobnost

Př.:



$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$

$P_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$

$P_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$

$P_3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}$

$P_4 = \frac{1}{5} \cdot 1$

$P_5 = \frac{1}{5} \cdot 0$

Věta: P je pravděpodobnost na jevovém poli $\mathcal{S}$ a jevy $\{B_i;\ 1 \leq i \leq m\}$ splňují podmínky: 1. $B_i \cap B_j = V$ pro $i \neq j$; 2. $U = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$

Pak pro $A \in \mathcal{S}$ je

(A) $P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A/B_i) \cdot P(B_i)$

Vzorec (A) je vzorec pro úplnou pravděpodobnost.

Neboť: $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = V$ pro $i \neq j$

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} (A \cap B_i) \Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{m} P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$

Př.: Obchod má zboží od dvou výrobců.

1. 30% a z toho 80% 1. jakost
2. 70% 85% 1. jakost

A – náhodně koupený výrobek je 1. jakosti ... $P(A)$

B_1 ... od 1. výrobce ; B_2 ... od 2. výrobce

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) = 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}7\cdot 0{,}85 = 0{,}24 + 0{,}595 = 0{,}835$$

Bayesův vzorec

Počítáme pravděpodobnost $P(B_i/A)$, tedy víme že jev A nastal a zajímá nás pravděpodobnost možnosti jeho realizace.

$$P(B_i/A) = \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A/B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(A/B_j)\cdot P(B_j)}$$

Př.: Koupíme 1. jakost (A).

$$P(B_1/A) = \frac{P(A\cap B_1)}{P(A)} = \frac{P(A/B_1)\cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}24}{0{,}835} = 0{,}287$$

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}595}{0{,}835} = 0{,}713$$

Opakované pokusy

Příklad: V osudí je a-bílých a b-černých koulí.

Náhodně táhneme kouli: $P_b = \frac{a}{a+b}$ – tažena bílá, $P_č = \frac{b}{a+b}$ – tažena černá

$b + č = 1$, $P_b + P_č = 1$, $\bar{b} = č$

Tah opakujeme n-krát za sebou (vždy kouli vracíme) – tedy jsou nezávislé

Počítáme pravděpodobnost, že v serii o n-pokusech je k bílých ((n-k) černých) pro $0\le k\le n$

- uvedené výsledky se vylučují
- jiné nejsou

Pravdepodobnost $P_n(k)$ jevu, že bílá je tažena právě k-krát je rovna

$$P_n(k) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^k\cdot\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}\binom{n}{k}, \quad 0\le k\le n$$

Bernoulliho schema.

Provádíme sérii n nezávislých pokusů a v každém z nich nostává jev A s pravděpodobností $P(A) = p$, $0\le p\le 1$. Pravděpodobnost toho, že se v serii objeví jev A právě k-krát je rovna

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0\le k\le n$$

Vlastnosti čísel $P_n(k)$

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$;

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [1 + (1-p)]^n = 1$$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\, P_n(k) = np$

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{0} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n! \cdot k}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = n \cdot p \sum_{k=1} \frac{(n-1)! \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{[(n-1)-(k-1)]}}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!} =$$

$$= |k-1 = \ell| = np \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!\,(n-1-\ell)!}\, p^{\ell} \cdot (1-p)^{(n-1-\ell)}}_{1} = n \cdot p$$

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-np)^2 P_n(k) = np(1-p)$ ... rozptyl

$$(k-np)^2 = k^2 - 2knp + n^2p^2 = k\,(k-1) + k + \dots$$

Věta Poissonova:

Nechť v serii o n-pokusech nastává jev A s pravděpodobností $P(A) = p_n$.
Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $0 \leq k$

Poznámka: Serie je velká ($n \geq 30$) a pravděpodobnost $P(A) = p$ je malá ($p \leq 0{,}1$).
Potom $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \doteq \frac{e^{-np}}{k!} (np)^k$, $0 \leq k \leq n$

Poznámka: Čísla $P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \dots$ jsou pravděpodobnosti z Poissonova rozdělení $P_0(\lambda)$

Př.: Sdělovací kanál přenáší symboly s chybovostí $p = 0{,}01$.
Jaká je pravděpodobnost, že ve zprávě o 200 symbolech budou alespoň 4 chyby.

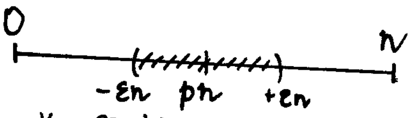
$n = 200$, $p = 0{,}01$, A - alespoň 4 chyby

$$P(A) = \sum_{k=4}^{200} P_{200}(k) = \sum_{k=4}^{200} P(k) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3)) = 1 - e^{-2}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{8}{3!}\right) =$$

$\lambda = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}01 = 2$

$$= 1 - e^{-2} \cdot \frac{19}{3} = 1 - 0{,}85712 = 0{,}1429$$

Věta: Bernoulliho nerovnost



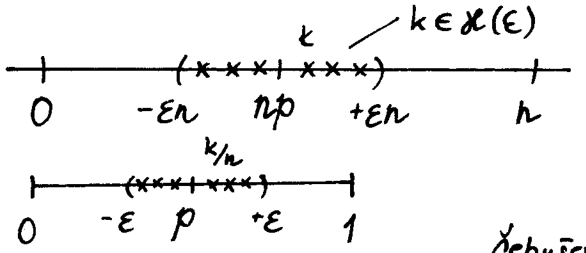
$\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon$

Je-li $P(A) = p$, $0 < p < 1$, pak v serii o n pokusech pro relativní četnost výskytů jevu A platí:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Čebyševova nerovnost pro binomické rozdělení. $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$

$\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon$, $|k - np| < n\varepsilon$, $(p-\varepsilon)n < k < (p+\varepsilon)n$



Čebyševova nerovnost pro binomické rozdělení.

$$np(1-p) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k)(k-np)^2 \geq \sum_{k \notin \mathcal{X}(\varepsilon)} P_n(k)(k-np)^2 \geq \varepsilon^2 n^2 \sum_{k \notin \mathcal{X}(\varepsilon)} P_n(k) = \varepsilon^2 n^2 \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{X}(\varepsilon)} P_n(k)\right)$$

Příklady:

1. 1000 krát hodíme mincí. Odhodněte pravděpodobnost s jakou se bude počet rubů vyskytovat v intervalu $(450, 550)$. $[\varepsilon; n; P = ?]$

   $n = 1000$; $p = \frac{1}{2}$; $np = 500$

   $k \in (450, 550) \Rightarrow n\varepsilon = 50 \Rightarrow \varepsilon = 0{,}05$

   $$P\left(\left|\frac{k}{1000} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}05\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{50 \cdot 0{,}05} = 0{,}9$$

2. $P(A) = p = 0{,}3$, serie má 500 pokusů. V jakém intervalu se bude počet jevů vyskytovat s pravděpodobností $P = 0{,}98$.

   $[n = 500;\ pn = 0{,}3 \cdot 500 = 150;\ P = 0{,}98;\ \varepsilon = ?]$

   $$P\left(\left|\frac{k}{500} - 0{,}3\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{500 \cdot \varepsilon^2} \geq 0{,}98$$

   $\varepsilon^2 \geq 0{,}001 \Rightarrow \varepsilon \geq 0{,}15$; $n\varepsilon = 500 \cdot 0{,}15 = 75$; $k \in (75; 225)$

3. Házíme kostkou. Jak velká musí být série hodů, aby se relativní četnost šestek lišila od $p = \frac{1}{6}$ nejvýše o $\varepsilon = 0{,}1$ s pravděpod. $P = 0{,}99$.

   $[P = 0{,}99;\ \varepsilon = 0{,}1;\ n = ?]$

   $$P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}1\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n \cdot 0{,}01} \geq 0{,}99;\quad n \geq \frac{5}{36}\cdot 10^4 = 1388{,}8$$

   $k \in \left(\left(\frac{1}{6} - 0{,}1\right)\cdot n;\ \left(\frac{1}{6} + 0{,}1\right)\cdot n\right)$; $k \in \langle 92; 370\rangle$; $np = 231{,}5$ - bude mít největší pravděpodobnost

Náhodná veličina

P … $\mathcal{S}$ jevové pole

$A \in \mathcal{S} \to$ reálné číslo

Náhodná veličina je „reálná funkce", která nabývá náhodně svých hodnot. Hodnoty odpovídají jevům a vyskytují se podle jejich pravděpodobnosti.

Př.: Hod kostkou $(U, \mathcal{S}, P)$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Def.: Náhodná veličina

Nechť $(U, \mathcal{S}, P)$ je pravděpodobnostní pole, pak funkce $X: U \to \mathbb{R}$ nazýváme náhodnou veličinou, jestliže:

$$\{E;\ E \subset U,\ X(E) \leq x\} \in \mathcal{S}.$$

x

Poznámka: Náhodné veličiny budeme označovat velkými písmeny X, Y, Z, R, S

Def.: Distribuční funkce náhodné veličiny X je reálná funkce reálné proměnné, která je definovaná vztahem

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(Budeme značit $F, G, \dots$)

Vlastnosti distribuční funkce

Věta: Je-li X náhodná veličina, pak pro její distribuční funkci platí:

1. pro $x \in \mathbb{R}$ je $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. F je neklesající, zprava spojitá a $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

x_1 x_2 $\quad (X \leq x_1) \subset (X \leq x_2)$, $P(X \leq x_1) \leq P(X \leq x_2)$, $F(x_1) \leq F(x_2)$ pro $x_1 \leq x_2$

$(X \leq x + \frac{1}{n})$ $\quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \leq x + \frac{1}{n}) = (X \leq x)$, $\lim\limits_{n \to \infty} P(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(X \leq x + \frac{1}{n})) = P(X \leq x)$,

$\lim\limits_{n \to \infty} F(x + \frac{1}{n}) = F(x)$

$-n$ $\quad \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (X \leq -n) = V$; $\lim\limits_{n \to \infty} P(X \leq -n) = F(-n) = P(V) = 0$

n $\quad \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \leq n) = U$; $\lim\limits_{n \to \infty} P(X \leq n) = \lim\limits_{n \to \infty} F(n) = P(U) = 1$

3. $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

x_1 x_2 $\quad (X \leq x_2) - (X \leq x_1) = (x_1 < X \leq x_2)$

$P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = P(x_1 < X \leq x_2)$

$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_2)$

4. $P(X = x) = F(x) - F(x-)$

$x - \frac{1}{2}$ x $\quad P(X = x) = \lim\limits_{n \to \infty} (F(x) - F(x - \frac{1}{n})) = F(x) - F(x-)$

5. $P(X > x) = 1 - F(x)$

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1-)$, $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2-) - F(x_1-)$,

$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2-) - F(x_1)$

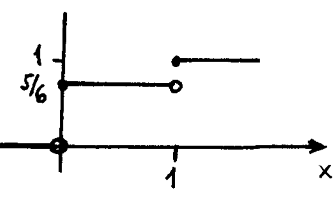
Příklady:

1. Házíme hrací kostkou (provádíme náhodný pokus a $P(A) = p$); $X = 1$ padne 6 (vyskytne se A); $X = 0$ nepadne 6 (nastane $\bar{A}$). (Alternativní rozdělení)

$F(x) = P(X \leq x)$. $X \in \{0, 1\}$; $F(x) = P(X \leq x < 0)$, pro $x < 0$, $(1-p)$

$F(x) = P(X \leq x < 1) = P(X = 0) = \frac{5}{6}$, $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 1 \cup X = 0) =$

$= P(X = 1) + P(X = 0) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$



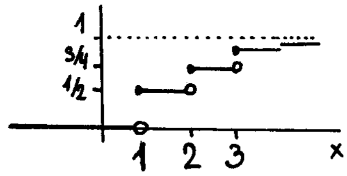
2. Geometrické rozdělení

Házíme mincí dokud nepadne rub. X - počet hodů, $X \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$P(X \leq x < 1) = F(x)$

$P(X \leq x < 1) = F(x)$, $P(X \leq x < 2) = P(X=1) = \frac{1}{2}$,

$P(X \leq x < 3) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

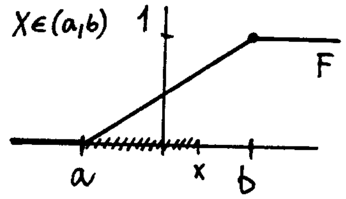


3. Rovnoměrné rozdělení (spojité)

Volíme náhodně bod $x \in (a, b)$ tak, že každá volba je stejně pravděpodobná.

X - souřadnice vybraného bodu

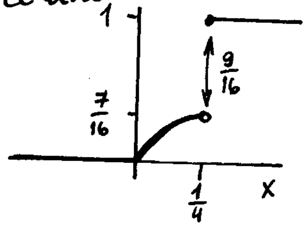
$$P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a} = F(x), \quad a \leq x \leq b$$

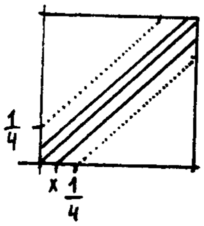


4. Smíšené rozdělení

Schůzka je domluvena mezi 12 a 13 hodinou. Jdeme oba náhodně a čekáme nejvýše 1/4 hodiny. X je doba čekání

$$P(X \leq x < \tfrac{1}{4}) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$$





Typy rozdělení náhodné veličiny

I. Diskrétní rozdělení

X nabývá diskrétních hodnot. Funkce $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem $p(x) = P(X = x)$; $x \in \mathbb{R}$ se nazývá pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X

Věta: Pro pravděpodobnostní funkci p platí:

1. $0 \leq p(x) \leq 1$; $x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = 1$

Hodnot x, kterých X nabývá s kladnou pravděpodobností je nejvýše spočetně mnoho (body tvoří posloupnost)

3. $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x \leq t} P(X = t) = \sum_{t \leq x} p(t)$
4. $P(X = x) = p(x) = F(x) - F(x-)$

Má-li X diskrétní rozdělení a $X \in \{x_1, x_2, \dots\}$, pak je popisujeme „tabulkou" pro pravd. funkci

x	x_1	x_2	
$p(x)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	...

Pamatovat — distribuční funkce je v ~~tomto~~ případě po úsecích konstantní; skoky jsou v bodech, kterých X nabývá a výška skoku je pravděpodobnost.

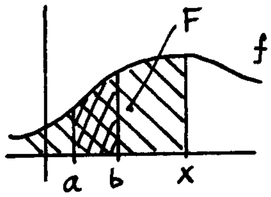
II. Spojité rozdělení

Náhodná veličina X má spojité rozdělení jestliže platí:

1. Diskrétní funkce F je spojitá;
2. pro $x \in \mathbb{R}$ je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Funkci f nazýváme hustotou náhodné veličiny X

Platí věta:
1. $f(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $F'(x) = f(x)$ v bodech spojitosti f
4. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$; $P(X=a) = 0$



f nesmí být záporná, protože by F klesalo

III. Smíšené rozdělení

Distribuční funkce F je nespojitá (má skoky) a platí pro ni:

$$F(x) = \sum_{t \leq x} F(t) - F(t-) + \int_{-\infty}^{x} F'(t)\,dt$$

Číselné charakteristiky

Střední hodnota $E(X)$

1. $E(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x p(x)$ – pokud řada konverguje
2. $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

Def.: Je-li X náhodná veličina, pak její střední hodnotou nazýváme číslo určené vztahem:

1. $E(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x p(x)$, je-li p pravděpodobnostní funkce X,
2. $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$, je-li f hustota náhodné veličiny X,
3. $E(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\left[F(x+) - F(x-)\right] + \int_{-\infty}^{\infty} x F'(x)\,dx$ pro smíšené rozdělení.

Věta: Vlastnosti střední hodnoty

1. Je-li $X = a$, pak $E(a) = a$;
2. $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$;
3. Je-li $a \leq X \leq b$, pak totéž platí pro $E(X)$ – $a \leq E(X) \leq b$
4. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
5. Jsou-li X a Y nezávislé, pak $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

Rozptyl, směrodatná odchylka

Def.: Rozptylem $D(X)$, náhodné veličiny X nazýváme číslo $D(X) = E((X-E(X))^2)$.
Hodnotu $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ nazýváme směrodatnou odhylku.
Počítáme jí pomocí vzorců:

a) $D(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - E(X))^2 p(x)$; b) $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)\,dx$,

c) $D(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - E(X))^2 [F(x+) - F(x)] + \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X)) F'(x)\,dx$, pokud existují.

Věta: Vlastnosti rozptylu

1. Je-li $X = a$, pak $D(X) = 0$;
2. Pro X, které není konstantní je $D(X) > 0$;
3. $D(\alpha X + \beta) = \alpha^2 D(X)$
4. $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
5. Jsou-li X a Y nezávislé, pak $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

Příklady rozdělení

I. Diskrétní rozdělení

1. Rovnoměrné rozdělení

$X \in \{1, 2, \dots, M\}$ a $P(X = k) = \frac{1}{M}$

$E(X) = \sum_{k=1}^{M} k \cdot \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \cdot (M+1) \cdot \frac{M}{2} = \frac{1}{2}(M+1)$

2. Binomické rozdělení $Bi(n, p)$

X je počet výskytu jevu A v opakované sérii n - nezávislých pokusů, je-li $P(A) = p$, $0 < p < 1$; $X \in \{0, 1, \dots, n\}$

$P(X=k) = p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$

$E(X) = np$; $D(X) = np(1-p)$

2.* Alternotivní rozdělení

$Bi(1, p)$; $X \in \{0, 1\}$, $p(0) = 1 - p$, $p(1) = p$

3. Geometrické rozdělení

X je počet pokusů, které musíme provést, aby nastal jev A, je-li $P(A) = p$, $0 < p < 1$. $X \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $p(x) = P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$, $1 \le k$;

$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \cdot p = p \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)^k)' = -p \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \right)' = -p \left(\frac{1-p}{1-(1-p)} \right)' = -p\left(\frac{1}{p} - 1\right)' = -p\left(\frac{-1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$

4. Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$, $\lambda > 0$

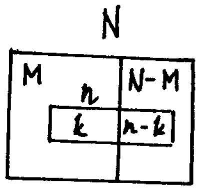
$X \in \{0, 1, 2, \dots\}$; $p(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Pozn.: Pro $n \geq 30$, $p < 0{,}1$ je $Bi(n,p) \approx Po(np)$.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$$

5. Hypergeometrické rozdělení

Máme N prvků a z nich M $(0 \leq M \leq N)$ má sledovanou vlastnost. Náhodně vybereme n prvků. X je počet prvků ve výběru, které mají vlastnost (M).



$$p(k) = P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad 0 \leq k \leq \min(n, m); \quad E(X) = n\frac{M}{N}$$

II. Spojitá rozdělení

6. Rovnoměrné rozdělení v intervalu $(a, b) = (\mu - h, \mu + h)$, $h > 0$

$X \in (a, b)$ a každá volba je stejně pravděpodobná.

$f(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in (a, b)$; $f(x) = 0$, $x \notin (a, b)$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$

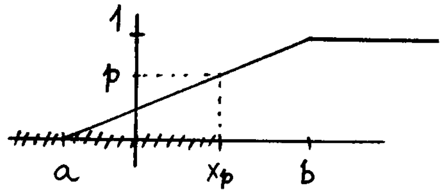
$$E(X) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2}\,\frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

Značíme: $E(X) = \mu$ $\quad (\mu - h, \mu + h)$; $h = \frac{1}{2}(b-a)$

Rozptyl: $\mu = 0$;

$$D(X) = \int_{-h}^{+h} x^2 \cdot \frac{1}{2h}\,dx = \frac{1}{2h}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-h}^{h} = \frac{2h^3}{3 \cdot 2h} = \frac{h^2}{3}; \quad \sigma(X) = h\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Další charakteristika: Je-li F distribuční funkce spojité náhodné veličiny, která je rostoucí v intervalu, kde se náhodná veličina vyskytuje, pak hodnotu x_p, $0 < p < 1$, pro kterou platí $P(X \leq x_p) = p \Leftrightarrow F(x_p) = p \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_p = F^{-1}(p)$ nazýváme p-kvantilem nebo $100p\,\%$-kvantilem.

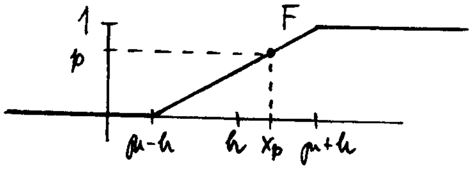


Některé kvantily:

$p = 0{,}5$: $x_{0,5}$ – MEDIÁN

$p = 0{,}1;\ 0{,}9;\ 0{,}05;\ 0{,}95$

Př.: Rovnoměrné rozdělení v $(\mu - h, \mu + h)$: $F(x) = \frac{1}{2h}(x - \mu + h)$, $x \in (\mu - h, \mu + h)$



$P(X \leq x_p) = F(x_p) = p$

$\frac{1}{2h}(x_p - \mu + h) = p \Rightarrow x_p = 2hp + \mu - h = \mu + h(2p - 1)$

$x_{0,5} = \mu = E(X)$

7. Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

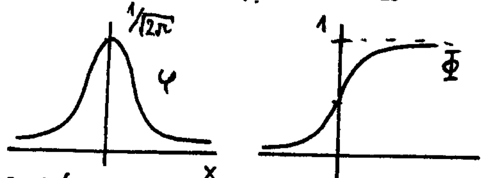
X má hustotu $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ a distribuční funkci

$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ – viz tabulky.

Rozdělení $N(0,1)$; $\mu = 0$; $\sigma = 1$, se nazývá rovnoměrné normální rozdělení ... hustota

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in R$$



Sudá $\varphi(x) = \varphi(-x)$ $\quad$ $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$

Vlastnosti normálního rozdělení

$$E(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x-\mu}{\sigma} \overset{!}{=} t \\ x = \sigma t + \mu \\ dx = \sigma dt \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) e^{-t^2/2} \sigma \, dt = \mu$$

$D(X) = \sigma^2$;

Lineární transformace

$X \sim f$ hustota, F – distribuční funkce, $Y = \alpha X + \beta$, g – hustota, G distribuční fce.

$G(y) = P(Y \leq y) = P(\alpha X + \beta \leq y) = P(\alpha X \leq y - \beta) \overset{*}{=}$

1. $\alpha > 0$: $\overset{*}{=} P(X \leq \frac{y-\beta}{\alpha}) = F(\frac{y-\beta}{\alpha})$;
2. $\alpha < 0$: $\overset{*}{=} P(X \geq \frac{y-\beta}{\alpha}) = 1 - F(\frac{y-\beta}{\alpha})$

$g(y) = G'(y) \overset{*}{=}$ 1. $\overset{*}{=} \frac{d}{dy}\left(F\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\right) = F'\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$

2. $\overset{*}{=} \frac{d}{dy}\left(1 - F\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\right) = -\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$

$$g(y) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$$

$$E(\alpha X + \beta) = E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, g(y)\, dy = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} y f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right) dy = \left| \begin{array}{l} x = \frac{y-\beta}{\alpha} \\ dx = \frac{1}{\alpha} dy \end{array} \right| \overset{(\alpha>0)}{=} \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha X + \beta) f(x)\, x\, dx =$$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \alpha E(X) + \beta$$

$X \sim N(\mu; \sigma^2)$; $Y = \alpha X + \beta$

$$g(y) = \frac{1}{|\alpha|} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{y-\beta}{\alpha} - \mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|\alpha|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(\alpha\mu+\beta))^2}{2(\alpha\sigma)^2}}; \quad Y \sim N(\alpha\mu + \beta; (\alpha\sigma)^2)$$

Lineární transformace veličiny s normálním rozdělením má opět normální rozdělení:

Důsledek: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; f je hustota, F distribuční fce

Potom veličina $U = \frac{X-\mu}{\sigma}$ má normální rozdělení $N(0; 1)$.

Dále platí:

$$X = \sigma U + \mu, \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Potom $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Pro kvantily dostaneme: u_p — p-kvantil $N(0,1)$, $\Phi(u_p) = p$

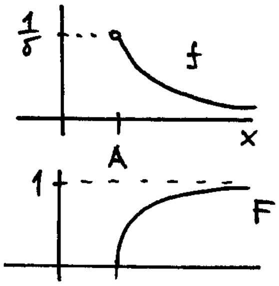
x_p – p-kvantil – $F(x_p) = p$

$$\Phi\left(\frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) = p \Leftrightarrow \frac{x_p-\mu}{\sigma} = u_p \Rightarrow x_p = u_p\sigma + \mu$$

8. Exponenciální rozdělení $Ex(A,\delta)$

má hustotu $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le A \\ \frac{1}{\delta} e^{-\frac{x-A}{\delta}}, & x > A \end{cases}$

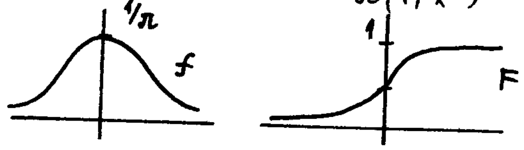
$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le A \\ 1 - e^{-\frac{x-A}{\delta}}, & x \ge A \end{cases}$



$$E(X) = \frac{1}{\delta}\int_A^\infty x \cdot e^{-\frac{x-A}{\delta}}\,dx = \left[\frac{1}{\delta}x\left(e^{-\frac{x-A}{\delta}}\cdot(-\delta)\right) - \frac{1}{\delta}e^{-\frac{x-A}{\delta}}\cdot\delta^2\right]_A^\infty = A + \delta; \quad D(X) = \delta^2$$

9. Cauchyovo rozdělení

má hustotu $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$, distribuční funkci $F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x\right), x \in \mathbb{R}$



$x_{0,5} = 0$

$$E(X) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_{-\infty}^{\infty} = \text{„}\infty - \infty\text{"} \text{ – neexistuje (ani } D(X))$$

Další charakteristika – MODUS $\hat{x}$ – je hodnota, pro niž je hustota či pravděpodobnostní funkce maximální.

$N(\mu,\sigma^2)$ – $\hat{x} = x_{0,5} = E(X) = \mu$; Cauchyho rozdělení $\hat{x} = x_{0,5} = 0$;

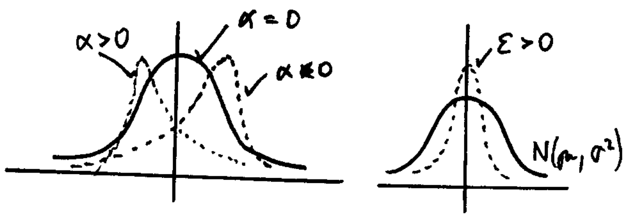
$Ex(A;\delta)$ ... $\hat{x} = A$, $(E(X) = A + \delta)$

Obecné a centrální momenty

Pro $k = 0, 1, \dots$ nazýváme $\mu_k'(X) = \mu_k' = E(X^k)$ jako k-tý obecný moment ($\mu_0' = 1$; $\mu_1' = E(X)$; $\mu_2' = E(X^2)$); $\mu_k(X) = \mu_k = E\left((X - E(X))^k\right)$ jako k-tý centrální moment(

Koeficient šikmosti $\alpha(X) = \alpha = \frac{\mu_3(X)}{(\sigma(x))^3}$

Koeficient špičatosti $\varepsilon(X) = \varepsilon = \frac{\mu_4(x)}{(\sigma(x))^2} - 3$



10. Charakteristická funkce

Pozn. Je-li X náhodná veličina pak pro $t \in \mathbb{R}$ značíme e^{jtX} náhodnou veličinu takovou, že $X = x \Rightarrow e^{jtX} = e^{jtx}$

Def.: Charakteristická funkce náhodné veličiny X je dána vztahem

$$\psi_X(t) = E(e^{jtX}) = E(\cos tX) + jE(\sin tX) \; ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Věta: Vzorec pro výpočet char. funkce

1. $\psi_X(t) = \sum_{x \in \mathbb{R}} p(x)\, e^{jtx}$, je-li p pravděpodobnostní funkce diskrétně rozdělené náhodné veličiny X_i.

2. $\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{jtx}\, dx$, je-li f hustota spojitě rozdělené náhodné veličiny

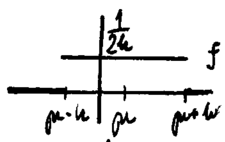
3. $\psi_X(t) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (F(x+) - F(x-))e^{jtx} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{jtx} F'(x)\, dx$, je-li F distribuční funkce (smíšeného rozdělení) náhodné veličiny X

Př.: 1. $X \sim Bi(n; p)$

$X \in \{0, 1, \dots, n\}; \quad p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$\psi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot e^{jtk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p e^{jt})^k (1-p)^{n-k} = (p e^{jt} + 1 - p)^n$$

2. X má spojité rovnoměrné rozdělení v $(\mu - h, \mu + h)$, $h > 0$



$$\psi_X(t) = \int_{\mu-h}^{\mu+h} \frac{1}{2h} e^{jtx}\, dx = \frac{1}{2hjt} \left[e^{jtx} \right]_{\mu-h}^{\mu+h} = \frac{e^{jt\mu}}{2hjt} \left(e^{jth} - e^{-jth} \right) = e^{jt\mu} \frac{\sin ht}{ht}$$

Vlastnosti charakteristické funkce

Věta: 1. $\psi_X(0) = 1, \; |\psi_X(t)| \leq 1;$ $\qquad |p(x)\, e^{jtx}| = p(x), \; |f(x) e^{jtx}| = f(x)$

2. $\psi_X(t)$ je spojitá;

3. $\psi_{\alpha X + \beta}(t) = E\left(e^{jt(\alpha X + \beta)}\right) = e^{jt\beta} E\left(e^{jX(\alpha t)}\right) = e^{jt\beta} \psi_X(\alpha t)$

4. Jsou-li X a Y nezávislé náhodné veličiny, pak $\psi_{X+Y}(t) = E\left(e^{jt(X+Y)}\right) = E(e^{jtX} \cdot e^{jtY}) = \psi_X(t) \cdot \psi_Y(t)$

5. Náhodná veličina má tolik momentů, kolik má charakteristická funkce derivací v bodě $t = 0$ a k-tá derivace $\psi_X^{(k)}(0) = j^k E(X^k)$.

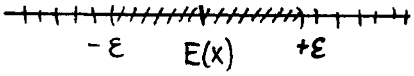
$$\psi_X'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{jtx}\, dx \right) = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)\, e^{jtx})'\, dx = j \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, e^{jtx}\, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_X'(0) = j \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = j E(X)$$

11. Čebyševova nerovnost

Je-li X náhodná veličina, která má konečnou střední hodnotu a rozptyl, pak $P(|X-E(X)|<\varepsilon) \geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Důkaz:



$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2\cdot f(x)\,dx \geq \int_{|x-E(x)|\geq\varepsilon}|x-E(x)|^2 f(x)\,dx \geq \varepsilon^2\int_{|x-E(x)|\geq\varepsilon} f(x)\,dx = \varepsilon^2(1-P(|X-E(X)|<\varepsilon))$$

$X \sim Bi(n,p)$; $E(X)=np$, $D(X)=np(1-p)$

$$P(|k-np|<\varepsilon)\geq 1-\frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}$$

Př.: $X\sim N(\mu;\sigma^2)$, pak $P(|X-\mu|<3\sigma)\geq 1-\dfrac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\dfrac{8}{9}\doteq 0{,}9$ (Přesně $0{,}9986$)

13. Transformace náhodné veličiny

Def.: Je-li X náhodná veličina a h je „měřitelná funkce", pak transformovaná náhodná veličina $Y=h(X)$ je náhodná veličina pro kterou platí:

$$X=x \Rightarrow Y=h(x)$$

Výpočet rozdělení:

I. X má diskrétní rozdělení – $P(X=x)=p(x)$, $x\in\mathbb{R}$; $Y=h(x)$ má diskrétní rozdělení

p^* – pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny Y

$$p^*(y)=P(Y=y)=P(h(X)=y)=P(X\in h^{-1}(y))=\sum_{y=h(x)}p(x)$$

Příklad: X:

x	-1	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

$Y=x^2-1$

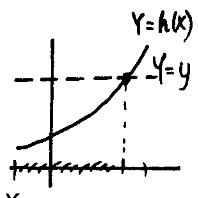
x	-1	0	1	2
y	0	-1	0	3

y	-1	0	3
$p^*(y)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

II. Obecný algoritmus

X má distribuční funkci F (hustotu f); $Y=h(x)$ má distr. funkci G (hustotu g – pokud existuje).

$$G(y)=P(Y\leq y)=P(h(X)\leq y)=P(X\in h^{-1}(-\infty,y\rangle)$$



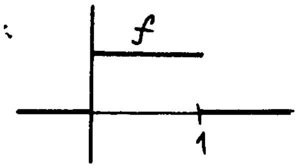
Příklad: h je rostoucí v oboru „X". $G(y)=P(Y\leq y)=P(h(x)\leq y)$

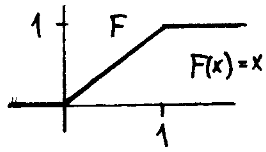
$$P(h(x)\leq y)=P(X\leq h^{-1}(y))=F(h^{-1}(y));\quad g(y)=G'(y)=\frac{d}{dt}(F(h^{-1}(y)))\cdot\frac{dh^{-1}(y)}{dy}=$$

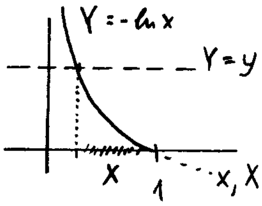
$$=f(h^{-1}(y))\cdot\frac{dh^{-1}(y)}{dy}$$

Příklady:

1. X má rovnoměrné rozdělení v $(0;1)$ a $Y = -\ln X$.

X:






$X \in (0;1)$

$Y \in \langle 0, \infty)$

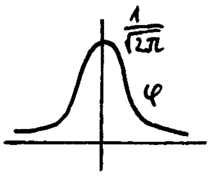
$g(y) = 0,\ y < 0$
$G(y) = 0,\ y \le 0$

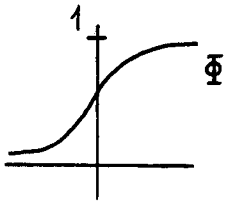
$y \ge 0$: $G(y) = P(Y \le y) = P(-\ln X \le y) = P(\ln X \ge -y) = P(X \ge e^{-y}) = 1 - P(X \le e^{-y}) = 1 - F(e^{-y}) =$
$= 1 - e^{-y},\ y \ge 0$

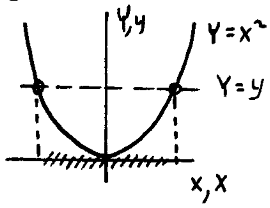
Hustota: $g(y) = (1 - e^{-y})' = e^{-y},\ y \ge 0$ nebo $g(y) = \frac{d}{dy}(1 - F(e^{-y})) = -f(e^{-y}) \cdot (e^{-y})' = e^{-y}$

2. $X \sim N(0,1)$ a $Y = X^2$

$X \sim \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, Φ







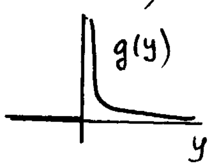
$X \in (-\infty, \infty) \Rightarrow Y \in \langle 0, \infty)$ $g(y) = 0$ pro $y < 0$; $G(y) = 0$ pro $y \le 0$

$y \ge 0$: $G(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - (1 - \Phi(\sqrt{y})) =$
$= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$

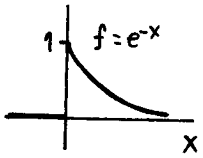
$g(y) = G'(y)$ $g(y) = 0,\ y < 0$

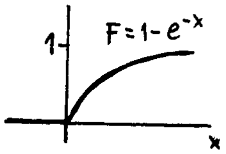
rozdělení chí-kvadrát $\chi^2(1)$

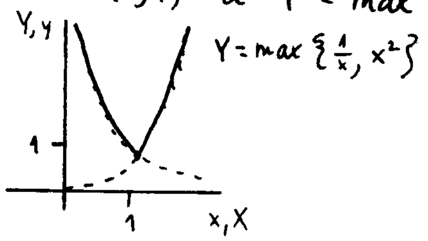
$g(y) = 2\,\Phi'(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\varphi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}},\ y > 0$



3. X má exponenciální rozdělení $Ex(0,1)$ a $Y = \max\{\frac{1}{X}, X^2\}$







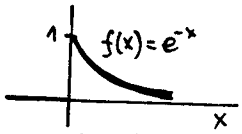
$X \in (0, \infty) \Rightarrow Y \in \langle 1, \infty)$

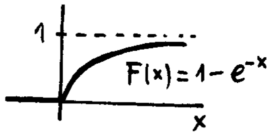
$g(y) = 0$ pro $y < 1$; $G(y) = 0$ pro $y \le 1$;

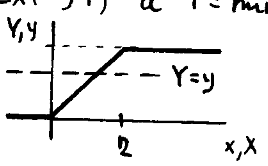
$y \ge 1$: $G(y) = P(Y \le y) = P(\max\{\frac{1}{X}; X^2\} \le y) = P(\frac{1}{y} \le X \le \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(\frac{1}{y})$

$g(y) = G'(y) = f(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y^2} f(\frac{1}{y})$, $g(y) = \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} + \frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y^2},\ y > 0$

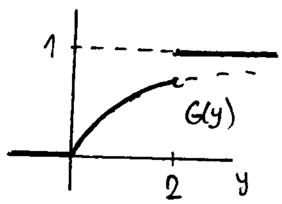
4. X má exponenciální rozdělení $Ex(0,1)$ a $Y = \min\{X; 2\}$







$G(y) = 0,\ y \le 0$
$G(y) = 1,\ y \ge 2$

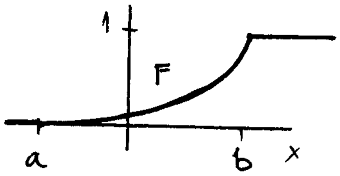


$X \in (0, \infty) \Rightarrow Y \in \langle 0, 2 \rangle$

$0 < y < 2$: $G(y) = P(Y \le y) = P(\min\{X; 2\} \le y) = P(X \le y) = F(y) = 1 - e^{-y}$

$E(Y) = 2 \cdot P(Y = 2) + \int_0^2 y \cdot G'(y)\,dy = 2(e^{-2}) + \int_0^2 y \cdot e^{-y}\,dy = 2(e^{-2}) + \left[e^{-y}(-y-1)\right]_0^2 =$
$= 2e^{-2} - 3e^{-2} + 1 = 1 - e^{-2}$

5. Generování náhodné veličiny s daným rozdělením

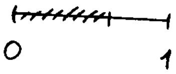


$F(a,b) \to \mathbb{R}$ spojitá, rostoucí, $F(a+) = 0$, $F(b-) = 1$;

Jestliže X má rovnoměrné rozdělení v $(0,1)$, pak $Y = F^{-1}(X)$ má rozdělení dané distribuční funkcí F.

$F(a,b) \to (0,1) \Leftrightarrow F^{-1}: (0,1) \leftrightarrow (a,b)$; $X \in (0,1) \Rightarrow Y \in (a,b)$

$a < y < b$: $G(y) = P(Y \leq y) = P(F^{-1}(X) \leq y) = P(X \leq F(y)) = F(y)$



$X \in (0,1)$; $X = p$, $Y = y_p = F^{-1}(p) \Leftrightarrow F(y_p) = p$, y_p je p-kvantil

Střední hodnota a rozptyl transformované náhodné veličiny

I. Diskrétní rozdělení

$X: p(x) = P(X = x)$; $Y = h(X)$, $p^*(y) = P(Y = y) = P(h(X) = y) = \sum\limits'_{y = h(x)} p(x)$

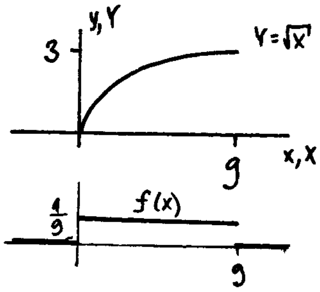
$$E(Y) = \sum_y y\,p^*(y) = \sum_{x \in \mathbb{R}}' h(x)\,p(x) = E(h(X))$$

II. Spojité rozdělení $X \sim f$, $Y \sim g$ ($Y = h(X)$, h je rostoucí)

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(h^{-1}(y)) \cdot \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \cdot dy = \left| \begin{array}{l} y = h(x) \\ dy = h'(x)dx \\ h^{-1}(y) = x \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) \cdot \underbrace{\frac{dh^{-1}(y)}{dy} \cdot h'(x)}_{1} \cdot dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,f(x)\,dx = E(h(X))$$

Př.: X má rovnoměrné rozdělení v $(0,9)$ a $Y = \sqrt{X}$



$$E(Y) = E(\sqrt{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x}\,f(x)\,dx = \int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{9}\,dx = \frac{2}{3 \cdot 9}\left[x\sqrt{x}\right]_0^9 = 2$$

14. Náhodný vektor

Př.: Házíme dvěma kostkami Y... druhá, X... první, stav (X,Y)

Def.: Náhodný vektor je uspořádaná n-tice $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ náhodných veličin X_i, $1 \leq i \leq n$.

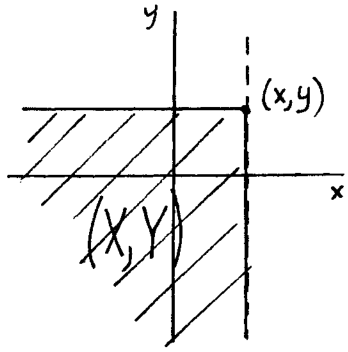
Úmluva: Pojmy a tvrzení budeme formulovat pro $n = 2$, $(X_1, X_2) \equiv (X, Y)$.

Def.: Sdružená distribuční funkce

Je-li (X,Y) náhodný vektor, pak sdruženou distribuční funkcí nazveme funkci $F: \mathbb{R}^2 \to \langle 0, 1 \rangle$, která je definovaná předpisem

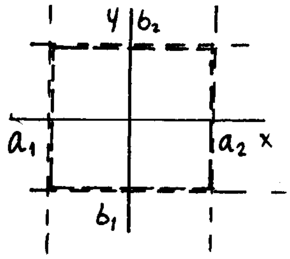
$$F(x,y) = P(X \leq x \cap Y \leq y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Věta: Vlastnosti distribuční funkce

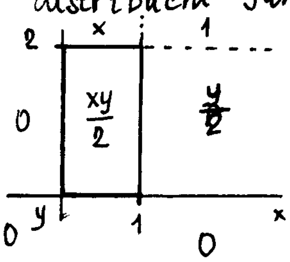


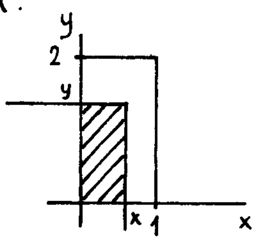
1. $0 \leq F(x,y) \leq 1$, pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty, y \to \infty} F(x,y) = 1$
3. Funkce F je neklesající v každé z proměných
4. $P(a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2) = F(a_2, b_2) - F(a_1, b_1) - F(a_2, b_1) + F(a_1, b_1)$

Příklad:



Náhodný vektor (X,Y) má rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$. Určete jeho sdruženou distribuční funkci.





Druhy rozdělení

I. Diskrétní rozdělení

Náhodný vektor má diskrétní rozdělení, pokud nabývá diskrétních hodnot z posloupnosti $\{(x_i, y_j)\}$.

Sdružená pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru, který má diskrétní rozdělení je dána vztahem

$$p(x,y) = P(X = x \cap Y = y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Platí pak:

1. $p(x,y) \geq 0$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
2. $\sum\limits_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} j(x,y) = 1$
3. $F(x,y) = \sum\limits_{t \leq x,\, z \leq y} p(t,z)$

p zadáme tabulkou

y \ x	x_1	x_2	x_3
y_1	$p(x_1,y_1)$	...	
y_2	⋮	⋱	

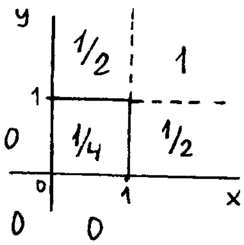
Př.: Házíme dvěma mincemi $X = 1$, na 1. rub; $X = 0$, na 1. líc
$Y = 1$ na 2. rub; $Y = 0$ na 2. líc

(X,Y) má diskrétní rozdělení

$$\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$$

y \ x	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

Sdružená distribuční funkce



II. Spojité rozdělení

Náhodný vektor (X,Y) má spojité rozdělení, jestliže pro jeho sdruženou distribuční funkci F platí:

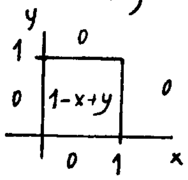
$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv\,, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Funkci f nazýváme sdruženou hustotou.

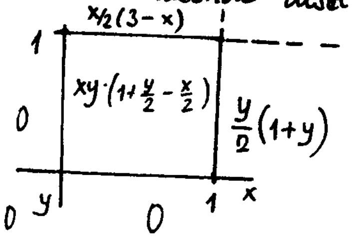
Platí pak:
1. $f(x,y) \ge 0$ v $\mathbb{R}^2$
2. $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$
3. V bodech spojitosti f je $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.
4. $P\big((X,Y)\in A\big) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$
5. $P\big((X,Y) = (x_0,y_0)\big) = 0$

Př.: Náhodný vektor (X,Y) má sdruženou hustotu f,

$$f(x,y) \begin{cases} = 1-x+y, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ = 0, & \text{jinde} \end{cases}$$



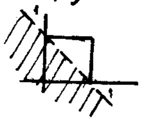
a) Určete sdruženou distribuční funkci F.



$$F(x,y) = \int_0^x\int_0^y (1-u+v)\,du\,dv = \ldots$$

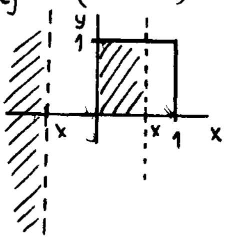
b) $P\left(X\le \frac14 \cap Y\le\frac34\right) = F\left(\frac14,\frac34\right) = \frac{3}{16}\cdot\left(1+\frac38-\frac18\right) = \frac{15}{64}$

c) $P(X+Y\le 1)$



$$P(X+Y\le 1) = \iint_\Delta (1-x+y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x+y)\,dy\right)dx = \frac12$$

d) $P(X\le x)$



$P(X\le x) = 0, \quad x\le 0$

$$P(X\le x) = \int_0^1\left(\int_0^x (1-u+v)\,du\right)dv = \int_0^1 \left[u-\frac{u^2}{2}+uv\right]dv =$$

$$= \int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+xv\right)dv = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2} = x\left(\frac32 - x\right), \quad 0\le x\le 1$$

$P(X\le x) = 1, \quad x\ge 1$

Všimneme si: $P(X\le x) = \lim\limits_{y\to\infty} P(X\le x \cap Y\le y) = \lim\limits_{y\to\infty} F(x,y) = F(x,1)$

15. Marginální rozdělení

Je-li $(X_1,\ldots,X_n)$ náhodný vektor a $1\le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, pak rozdělení náhodného vektoru $(X_{i_1}, X_{i_2},\ldots,X_{i_k})$ se nazývá marginální.

Distribuční funkce (marginální)

(X,Y) je náhodný vektor a F je jeho sdružená distribuční funkce, pro marginální distribuční funkci platí:

1. X: F_1 – marginální distr. funkce X

$$F_1(x) = P(X\le x) = \lim_{y\to\infty} P(X\le x, Y\le y) = \lim_{y\to\infty} F(x,y)$$

2. Y: F_2 – marg. dist. funkce

$$F_2(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y)$$

Má-li (X,Y) spojité rozdělení se sdruženou hustotou f, pak

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv \quad ; \quad F_2(x) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv$$

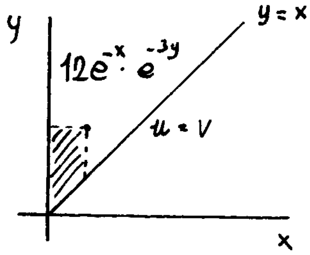
Pro marginální hustoty platí:

1. $X \ldots f_1(x) = F_1'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv\right) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,dv\right)du =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)\,dv \qquad \int_{-\infty}^{x} h(u)\,du \Rightarrow h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,dv$$

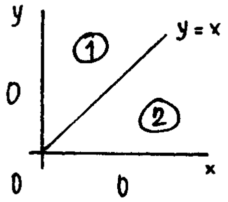
2. $Y \ldots f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)\,du$

Příklad: (X,Y) má sdruženou hustotu f



$$f(x,y) = \begin{cases} 12e^{-x-3y}, & 0<x<y \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

a) určete F, F_1, F_2; b) určete f_1, f_2



$$F(x,y) = \int_0^x\left(\int_u^y 12e^{-u}\cdot e^{-3v}\,dv\right)du = \int_0^x\left[-4e^{-u}\cdot e^{-3v}\right]_u^y du = \cancel{\int_0^x(-4e^{-u}e^{-3y} +}$$

$$\cancel{+4e^{-u}e^{-3x})\,dx = \left[4e^{-u}e^{-3y} - 4e^{-u}e^{-3x}\right]_0^x = 4e^{-x}}$$

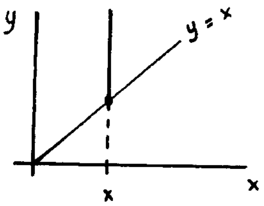
$$= \int_0^x 4e^{-u}\left(e^{-3u} - e^{-3y}\right)du = \left[-e^{-4u} + 4e^{-u}e^{-3y}\right]_0^x = 4\left(\frac{-e^{-4x}}{4} + \frac{1}{4} + e^{-x-3y} - e^{-3y}\right) \; 1$$

$0<y<x$: $F(x,y) = F(y,y) = 1 + 3e^{-4y} - 4e^{-3y}$ 2

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-4x} \end{cases} \qquad F_2(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1 + 3e^{-4y} - 4e^{-3y}, & y \ge 0 \end{cases}$$

b) $f_1(x) = F_1'(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 4e^{-4x}, & x>0 \end{cases}$

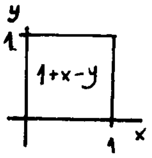
$f_2(y) = F_2'(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ 12e^{-3y} - 12e^{-4y}, & y>0 \end{cases}$



$$f_1(x) = \int_x^{\infty} 12e^{-x}\cdot e^{-3y}\,dy = \left[-4e^{-x}\cdot e^{-3y}\right]_x^{\infty} = 4e^{-4x}, \quad x>0$$

$$f_2(y) = \int_0^y 12e^{-x}e^{-3y}\,dx = \left[-12e^{-x}e^{-3y}\right]_0^y = -12e^{-4y} + 12e^{-3y}, \quad y>0$$

Př.: $f(x,y) = \begin{cases} 1+x-y, & 0<x<1, \; 0<y<1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

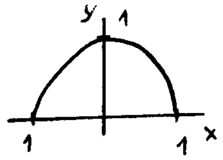


X: $f_1(x) = 0, \; x \in \langle 0,1\rangle$, $f_1(x) = \int_0^1 (1+x-y)\,dy = \left[y(1+x) - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = 1 + x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + x, \; 0<x<1$

Y: $f_2(y) = 0, \; y \in (0,1)$, $f_2(y) = \int_0^1 (1+x-y)\,dx = 1 - y + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - y, \; 0<y<1$

Příklad: (X,Y) má rovnoměrné rozdělení v množině $A=\{(x,y);\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$

Určete sdruženou hustotu a marginální hustoty.



$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2}{\pi}, & (x,y)\in A \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

X: $f_1(x)=0,\ x\notin(-1,1)$

$$f_1(x)=\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\,dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\quad x\in(-1,1)$$

Y: $f_2(y)=0,\ y\in(0,1)$

$$f_2(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} \frac{2}{\pi}\,dx = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2},\quad 0<y<1$$

Marginální pravděpodobnostní funkce

(X,Y) má diskrétní rozdělení, $p(x,y)=P(X=x\cap Y=y)$

X... má diskrétní rozdělení; $p_1(x)=P(X=x)$;

$$p_1(x)=P(X=x)=\sum_{y\in\mathbb{R}} P(X=x\cap Y=y)=\sum_{y\in\mathbb{R}} p(x,y)$$

Pro Y také platí $p_2(y)=P(Y=y)=\sum_{x\in\mathbb{R}} p(x,y)$

Př.:

y \ x	0	1	$p_1(y)$
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
$p_1(x)$	1/2	1/2	1

16. Funkce náhodného vektoru

(X,Y) je náhodný vektor, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, pak náhodná veličina $Z=h(X,Y)$, která je definovaná vztahem $X=x,\ Y=y \Rightarrow Z=h(x,y)$ se nazývá funkce (transformace) náhodného vektoru (X,Y).

I. Diskrétní rozdělení (X,Y)... $p(x,y)=P(X=x\cap Y=y)$

$Z=h(X,Y)$ – má diskrétní rozdělení. Potom pro její pravd. funkci p^* platí:

$$p^*(z)=P(Z=z)=P(h(X,Y)=z)=\sum_{h(x,y)=z} p(x,y)$$

Př.: $Z=X+Y$, viz příklad ↗

(x,y): $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,0)$; $(1,1)$

z: 0; 1; 1; 2

z	0	1	2
$p^*(z)$	1/4	1/2	1/4

II. Spojité rozdělení

(X,Y) má sdruženou hustotu f a $Z=h(X,Y)$. Označme G distribuční funkci náhodné veličiny Z:

$$G(z)=P(Z<z)=P(h(X,Y)<z)=\iint_{(x,y)\in h^{-1}((-\infty,z))} f(x,y)\,dx\,dy$$

Pro hustotu g náhodné veličiny Z je $g(z)=G'(z)$.

Dodatek: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$E(X+Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y)\, f(x,y)\, dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} x\, f(x,y)\, dx\,dy + \iint_{\mathbb{R}^2} (x+y)\, dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\right) dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2(y)\, dy = E(X) + E(Y)$$

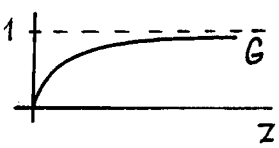
Př.: Rayleighovo rozdělení

X a Y jsou nezávislé a mají rozdělení $N(0,\sigma^2)$. Určete rozdělení $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$.

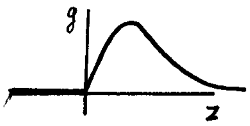
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \left(f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)\right)$$

$Z \in (0,\infty)$; $g(z) = G(z) = 0$ pro $z < 0$;

$$z \geq 0; \quad G(z) = P(Z \leq z) = P\left(\sqrt{X^2+Y^2} \leq z\right) = P(X^2+Y^2 \leq z^2) = \iint_{X^2+Y^2 \leq Z} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\, dx\,dy =$$
$$= \left| \begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{matrix} \right| = \frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} \int_0^z \rho \cdot e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \cdot d\rho = \frac{1}{\sigma^2} \left[-\sigma^2 e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\right]_0^z = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \quad z > 0$$



$$g(z) = G'(z) = \frac{z}{\sigma^2}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, \quad z > 0$$

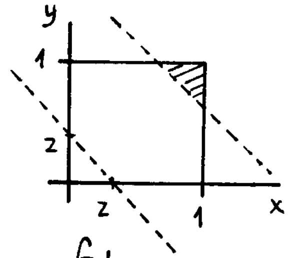


Př. 2: (X,Y) má rovnoměrné rozdělení v $(0,1) \times (0,1)$ a

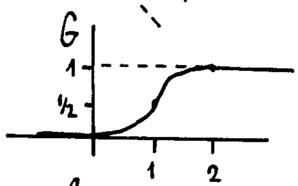
a) $Z = X+Y$, b) $Z = X \cdot Y$. Určete rozdělení Z.

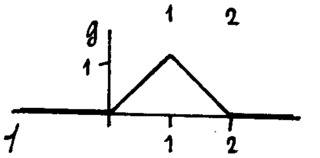
$f(x,y) = 1, \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1)$; $z \in (0,2)$

$0 \leq z \leq 2$: $G(z) = P(X+Y \leq z) =$



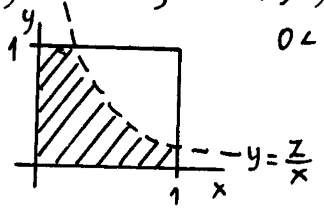
$$G(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \frac{1}{2} z^2, & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(2 - z^2), & 1 \leq z \leq 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} 0, & z < 0,\ z > 2 \\ z, & 0 < z < 1 \\ 2 - z, & 1 < z < 2 \end{cases}$$





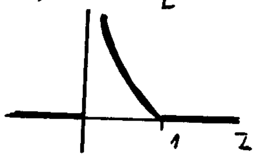
$$E(Z) = \int_0^1 z^2\, dz + \int_1^2 (2z - z^2)\, dz = \frac{1}{3} + \left[z^2 - \frac{z^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} - 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 3 - 2 = 1$$

b) $Z = XY$; $Z \in (0,1)$



$$0 < z < 1: \quad G(z) = P(X \cdot Y \leq z) = 1 - \int_z^1 \left(\int_{z/x}^1 1\, dy\right) dx = 1 - \int_z^1 \left(1 - \frac{z}{x}\right) dx = 1 - \left[x - z \ln x\right]_z^1 =$$
$$= 1 - 1 + z - z\ln z = z(1 - \ln z)$$

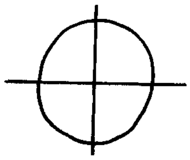
$$g(z) = 1 - \ln z + z\left(0 - \frac{1}{z}\right) = -\ln z$$



$$E(Z) = \int_0^1 -z \ln z\, dz = \left[-\frac{z^2}{2} \ln z\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{z}{2}\, dz = \left[\frac{z^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy\, dx\, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Př. 3: X a Y jsou nezávislé a mají rozdělení $N(0,1)$. Určete rozdělení $Z = X^2 + Y^2$.



$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}, \quad z \in (0,\infty)$$

$$G(z) = P(X^2+Y^2 \le z) = 1 - e^{-\frac{z}{2}}; \quad g(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}}, \ z>0; \ g(z) = 0, \ z<0$$

$$Ex(0,2) = \chi^2(2)$$

17. Podmíněná rozdělení

I. Diskrétní rozdělení

$(X,Y) \dots p(x,y) = P(X = x \cap Y = y)$

$y \backslash x$	x	$p_2(y)$
y	$p(x,y)$	$p_2(y)$
$p_1(x)$	$p_1(x)$	

Podmíněná náhodná veličina – hledáme rozdělení X za podmínky, že Y nabývá určité hodnoty. Tedy nastal jev $Y = y$.

Tuto veličinu označujeme $X|Y=y \equiv X|y$. Obdobně $Y|X=x \equiv Y|x$.

Pravděpodobnostní funkce podmíněné náhodné veličiny $X|y$ se nazývá podmíněná pravděpodobnostní funkce a označujeme ji $p(x|y)$ (podmíněna je x, y je parametr). Obdobně $p(y|x)$ je p. p. f. $Y|x$.

$$p(x|y) = P(X=x \,|\, Y=y) = \frac{P(X=x \cap Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{p(x,y)}{p_2(y)}; \quad (p_2(y) \neq 0)$$

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p_1(x)}; \quad (p_1(x) \neq 0)$$

Př.: (X,Y) má pravděpodobnostní funkci z tabulky:

$y \backslash x$	0	1	2	$p_2(y)$
1	1/4	0	1/4	1/2
2	1/8	1/4	1/8	1/2
$p_1(x)$	3/8	1/4	3/8	1

$X|1$: $(Y=1)$

x	0	1	2
$p(x\|1)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

$X|2$: $(Y=2)$

x	0	1	2
$p(x\|2)$	1/4	1/2	1/4

Střední hodnota a rozptyl se počítá podle vzorců dříve uvedených.

$$E(X|y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x\, p(x|y); \quad E(Y|x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} y\, p(y|x); \quad E(X|1) = 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$$

Závislost a nezávislost

X nezávisí na Y jestliže X a $X|y$ jsou shodné pro všechny hodnoty $Y=y$.

Tedy $p_1(x) = p(x|y)$ pro všechna $Y = y$. $p_1(x) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)} \Longleftrightarrow p_1(x) \cdot p_2(y) = p(x,y)$

Veličiny X a Y jsou nezávislé, právě když platí (jedno z toho):

1. $p(x|y) = p_1(x)$ nebo $p(y|x) = p_2(y)$
2. $p(x,y) = p_1(x)\, p_2(y)$ (tj. $P(X=x \cap Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$

Př.: $x=0,\ y=1,\ p(0,1)=\frac{1}{4};\ p_1(0)\,p_2(1)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

X a Y jsou závislé!

Nezávislost náhodných veličin

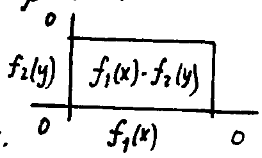
Def.: Říkáme, že náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé jestliže jsou jevy $(X\le x)$ a $(Y\le y)$ nezávislé pro všechna $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Tedy $P(X=x\cap Y=y)=P(X\le x)\cdot P(Y\le y)\Leftrightarrow F(x,y)=F_1(x)\,F_2(y)$

Má-li (X,Y) spojité rozdělení, pak $f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$ tedy $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

Pamatovat: X a Y jsou nezávislé, pak platí:

1. $f(x,y)>0$ na obdélníku
2. $f(x,y)$ má tvar součinu v x a y.



Podmíněné hustoty jsou hustoty náhodných veličin $X|y$ a $Y|x$, má-li (X,Y) spojité rozdělení.

Podmíněná hustota $f(x|y)$ veličiny $X|y$ je rovna $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)},\ f_2(y)\neq 0.$

Podmíněná hustota $f(y|x)$ veličiny $Y|x$ je rovna $f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)},\ f_1(x)\neq 0.$

Ještě k nezávislosti

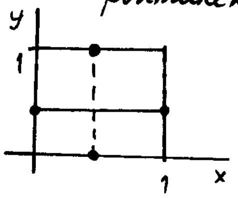
X a Y jsou nezávislé, pak $f(X|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f_1(x)\,f_2(y)}{f_2(y)}=f_1(x)$

X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ podmíněné veličiny a marginální jsou shodné,

tj. $X\equiv X|y;\ Y\equiv Y|x;$

Př.1: (X,Y) má sdruženou hustotu $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{jinde}\end{cases}$

Určete podmíněné a marginální rozdělení.



$X\ldots f_1(x)=\int_0^1 (x+y)\,dy=x+\frac{1}{2},\ 0<x<1$

$Y\ldots f_2(y)=\int_0^1 (x+y)\,dx=\frac{1}{2}+y,\ 0<y<1$

$X|y\ (0<y<1):\ f(x|y)=\frac{x+y}{\frac{1}{2}+y},\ 0<x<1$

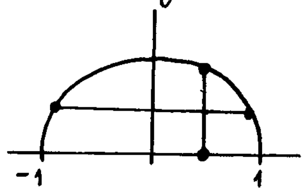
$Y|x\ (0<x<1):\ f(y|x)=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}},\ 0<y<1$

VELIČINY X a Y JSOU závislé

$E(X|y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x|y)\,dx=\int_0^1 x\,\frac{x+y}{\frac{1}{2}+y}\,dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+y}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}y\right);$

Př. 2: (X,Y) má rovnoměrné rozdělení v množině $\{(x,y);\ x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$.

Určete marginální a podmíněné rozdělení $f(x,y) = \frac{2}{\pi}$, $(x,y) \in \Delta$



$X: f_1(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$

$Y: f_2(y) = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}$, $y \in (0,1)$

$X|y\ (0<y<1):\quad f(x|y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}$, $-\sqrt{1-y^2} < x < \sqrt{1-y^2}$

$Y|x\ (-1<x<1):\quad f(y|x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $0 < y < \sqrt{1-x^2}$

$$E(X|y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x}{2\sqrt{1-y^2}}\,dx = 0, \quad E(Y|x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,y\,dy = \frac{1-x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$$

X a Y jsou závislé!

18. Koeficient korelace

Popisuje číselné závislost náhodných veličin

Def.: Je-li (X,Y) náhodný vektor, pak číslo $C(X,Y) = E\big[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\big]$ se nazývá KOVARIANCE X a Y.

Vlastnosti:

1. $C(X,X) = D(X)$
2. $C(X,Y) = C(Y,X)$
3. $C(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$

   $C(X,Y) = E\big[X\cdot Y - X\,E(Y) - Y\,E(X) + E(X)E(Y)\big] = E(XY) - E(X)E(Y)$
4. X a Y jsou nezávislé, pak $C(X,Y) = 0$. (a $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$)

4*. $C(X,Y) \ne 0$, pak X a Y jsou závislé.

X a Y nezávislé $\Leftrightarrow f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\,f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} (x\cdot f_1(x))\cdot(y\,f_2(y))\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx = E(Y)\cdot E(X)$$

Def.: Koeficient korelace je definován vztahem: $\varrho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}$

Platí:
1. $\varrho(X,X) = 1$
2. $\varrho(X,Y) = \varrho(Y,X)$
3. $\varrho(X,Y) \ne 0$, pak X a Y jsou závislé

3*. X a Y jsou nezávislé, pak $\varrho(X,Y) = 0$

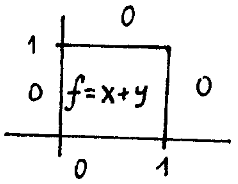
4. $|\varrho(X,Y)| \le 1$
5. $\varrho(X, aX+b) = \operatorname{sgn} a$

5*. $\varrho(X,Y) = \pm 1 \Leftrightarrow Y = aX+b$ ($\varrho = 1 \Rightarrow a>0$, $\varrho = -1$ pro $a<0$)

$$C(X, aX+b) = E(aX^2+bX) - E(X)\left(aE(X)+b\right) = a\left(E(X^2)-(E(X))^2\right) = a\,D(X)$$

$$\rho(X, aX+b) = \frac{a\,D(X)}{\sqrt{D(X)\,a^2 D(X)}} = \frac{a}{|a|}$$

Př.:



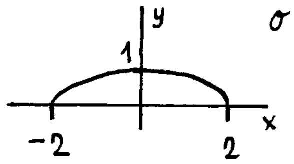
$$f_1(x) = x + \frac{1}{2},\quad 0 \le x \le 1$$
$$f_2(y) = y + \frac{1}{2},\quad 0 \le y \le 1$$

$$E(X) = \frac{7}{12},\quad E(X^2) = \frac{5}{12},\quad D(X) = \frac{11}{144};\quad E(Y) = \frac{7}{12}, \dots,\quad D(Y) = \frac{11}{144}$$

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^1 (x^2y + xy^2)\,dy\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)dx = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{1}{3} - \frac{49}{144}}{\sqrt{\left(\frac{11}{144}\right)^2}} = \frac{48-49}{11} = -\frac{1}{11}$$

Př.: (X,Y) má rovnoměrné rozdělení v $A = \{(x,y);\ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$. Určete ρ.



$\sigma = \pi a b$

$f(x,y) = \frac{1}{\pi},\ (x,y) \in A$

$$E(X,Y) = \iint_{\frown} \frac{xy}{\pi}\,dx\,dy = \underset{\text{ZE SYMETRIE}}{0};\quad E(X) = 0$$

$$\rho(X,Y) = \frac{0 - 0\cdot E(Y)}{\sqrt{\dots}} = 0$$

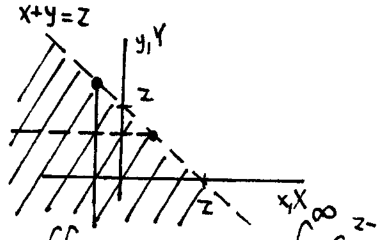
Ale X a Y jsou závislé.

Rozdělení součtu

(X,Y) a $Z = X+Y$

I. (X,Y) má spojité rozdělení

$(X,Y) \sim f(x,y)$ – sdružená hustota



$$Z \sim G, g;\quad G(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le z) = \iint_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\,dx\right)dy$$

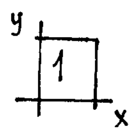
I* (X,Y) X a Y jsou nezávislé

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\left(\int_{-\infty}^{z-x} f_2(y)\,dy\right);\quad g(z) = G'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,f_2(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\,f_2(y)\,dy$$

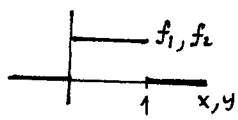
Př.: (X,Y) mají rovnoměrné rozdělení v $(0,1)\times(0,1)$

Nebo: X a Y mají rovnoměrné rozdělení v $(0,1)$ a jsou nezávislé.



$f_1(x) = 1,\ x \in (0,1);\ f_2(y) = 1,\ y \in (0,1)$

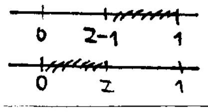
$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)\,dx$$



$0 < x < 1$
$0 < z-x < 1$
$z-1 < x < z$

a) $z-1 < 1 \Rightarrow z < 2$; $g(z) = 0$ pro $z \notin \langle 0,2 \rangle$
$0 < z$

$$g(z) = \begin{cases} 2-z; & 1<z<2 \\ z; & 0<z<1 \end{cases}$$



II. X a Y mají diskrétní rozdělení

$(X,Y) \dots p(x,y) \dots$ sdružená pravd. funkce

$Z \dots p^*$ $\quad p^*(z) = P(Z=z) = P(X+Y=z) = \sum\limits_{x+y=z} p(x,y)$

II.* X a Y jsou nezávislé – $p(x,y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$

$$p^*(z) = \sum_{x+y=z} p_1(x)\cdot p_2(y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} p_1(x)\,p_2(z-x) = \sum_{y\in\mathbb{R}} p_1(z-y)\,p_2(y)$$

Př.: X a Y mají Poissonova rozdělení. $Po(\lambda)$, resp. $Po(\mu)$ a jsou nezávislé. $Z = X+Y$

$X \sim Po(\lambda) \dots p_1(k) = e^{-\lambda}\cdot\dfrac{\lambda^k}{k!}$; $k = 0,1,2,\dots$

$Y \sim Po(\mu) \dots p_2(m) = e^{-\mu}\cdot\dfrac{\lambda^m}{m!}$; $m = 0,1,2,\dots$

$Z \dots p^*(n)$; $n = 0,1,2,\dots$

$$p^*(n) = P(X+Y=n) = \sum_k P(X=k \cap Y=n-k) = \sum_k P(X=k)P(Y=n-k) = \sum_k p_1(k)\,p_2(n-k)$$

$$p^*(n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\mu}\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\lambda^k\mu^{n-k} = e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

$Z \sim Po(\lambda+\mu)$

Pozn.: $(X_1,\dots,X_n)$ mají rozdělení $Po(\lambda)$ a jsou nezávislé; $\tilde{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim Po(n\lambda)$

III. X má diskrétní rozdělení a pravd. funkci $p = p(x)$

Y má spojité rozdělení s hustotou f (dist. funkcí F) } a jsou nezávislé. $Z = X+Y$

$$G(z) = P(Z\le z) = P(X+Y\le z) = \sum_k P(X=x_k \cap Y\le z-x_k) = \sum_k P(X=x_k)P(Y\le z-x_k) = \sum_k p(x_k)F(z-x_k)$$

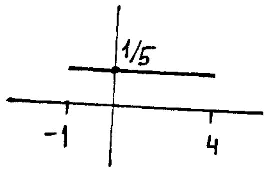
JE SPOJITÁ

$$g(z) = G'(z) = \sum_k p(x_k)\cdot f(z-x_k)$$ Z má spojité rozdělení

Př.: X má diskrétní rozdělení

x	0	1
$p(x)$	$1/3$	$2/3$

Y má rovnoměrné rozdělení v $\langle -1, 4\rangle$;



$$g(z) = \sum_k p(x_k)\cdot f(z-x_k) = p(0)\,f(z) + p(1)\,f(z-1) = \tfrac{1}{3}f(z) + \tfrac{3}{2}f(z-1)$$

$z<-1$; $z-1<-1$
$z<0$

$z>4$; $z-1>4$
$z>5$

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z<-1 \\ \frac{1}{15}, & -1<z<0 \\ \frac{1}{5}, & 0<z<4 \\ \frac{2}{15}, & 4<z<5 \\ 0, & z>5 \end{cases}$$

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE – M2

$x'(t) = f(t, x)$

$x(t)$, $t_0 \in (a, b)$ – počáteční podmínka

$t \in (a, b)$ – řešení v intervalu (a, b)

$x(t_0) = \xi$

$x'(t) + x h(t) = g(t)$ – lineární dif. rovnice 1. řádu; $x' + xh = 0$ – homogenní rovnice

$x(t) = C \cdot e^{-\int h(t)\, dt}$; $x = C(t) \cdot e^{-\int h(t)\, dt}$ – variace konstanty

$x^{(n)} + a x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f$ – Lineární dif. rovnice řádu n

$\{u_1, \ldots, u_n\}$ – fundamentální systém, $x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$ – obecné řešení,

$x = \sum c_i(t) u_i(t)$ – variace konstant. $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, $u_i = e^{\lambda_i t}$, $(t^k e^{\lambda_i t})$

SOUSTAVY DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

Def.: Soustavu (S) tvaru:

$$(S) \quad \begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t; x_1(t), \ldots, x_n(t)) \end{aligned}$$

kde $f_i : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená nazýváme soustavou n-diferenciálních rovnic 1. řádu.

Def.: Řešení soustavy (S) v intervalu (a, b) je n-tice funkcí $x_1, \ldots, x_n$, $x_i : (a, b) \to \mathbb{R}$, taková, že pro každé $t \in (a, b)$ je $x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $1 \le i \le n$

Def.: Počáteční podmínku pro (S) nazýváme podmínku tvaru
$x_1(t_0) = \xi_1$, $x_2(t_0) = \xi_2$, …, $x_n(t_0) = \xi_n$, kde $(t_0; \xi_1, \ldots, \xi_n) \in G$

Maticový zápis

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ matice typu $(n, 1)$

$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ soustavu (S) budeme zapisovat $\underline{x}'(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t))$ $(x' = f(t, x))$

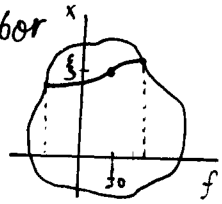
$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ počáteční podmínka $\underline{x}(t_0) = \underline{\xi}$

Věta: O existenci a jednoznačnosti řešení;
Jestliže jsou funkce f_i spojité v otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $1 \le j \le n$ jsou v okolí každého bodu G omezené pro $1 \le i \le n$, pak platí:

1. Soustava (S) … $x' = f(t, x)$ má v okolí každého bodu $(t_0, \xi_0) \in G$ řešení.

2. Řešení (S) určené počáteční podmínkou $\underline{x}(t_0) = \underline{\xi}$ je určeno jednoznačně v okolí bodu $(t_0, \underline{\xi})$

3. Existuje řešení (S) z bodu 2., které má maximální def. obor



Pozn.: $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$

$x^{(n)}(t) = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}(t))$

$x_1 = x$ $\qquad x_1 = x;\ x_1' = x_2 = x';\ x_2' = x_3 = x''$

$x_1' = x_2$

$x_2' = x_3$

$\vdots$

$x_n' = f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Def.: • Soustavou lin. diferenciálních rovnic nazýváme soustavou (LS) tvaru

$$x_i'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_k(t) + b_i(t), \quad 1 \le i \le n,$$

kde $t \in (a; b) \in \mathbb{R}$, funkce a_{ik} jsou spojité v (a, b) a b_i jsou po úsecích spojité v (a, b) pro $1 \le i, k \le n$.

• Řešením (LS) v (a, b) je n-tice funkcí $x_1, \dots, x_n$ taková, že pro $t \in (a, b)$ platí (LS).

• Počáteční podmínka pro (LS) je podmínka tvaru $x_i(t_0) = \xi$, $1 \le i \le n$, kde $t_0 \in (a, b)$ a $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

Maticový zápis

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad \mathbb{A} = (a_{ik}) \qquad \underset{(n,1)}{\begin{pmatrix} x' \end{pmatrix}} = \underset{(n,n)}{\begin{pmatrix} \mathbb{A} \end{pmatrix}} \underset{(n,1)}{\begin{pmatrix} x \end{pmatrix}} + \underset{(n,1)}{\begin{pmatrix} b \end{pmatrix}}$$

Pak (LS) lze zapsat ve tvaru (LS) $\underline{x}' = \mathbb{A}\underline{x} + \underline{b}$

Věta 1.: Soustava (LS) má řešení v (a, b) jednoznačně určenou počáteční podmínku $\underline{x}(t_0) = \underline{\xi}$, $t_0 \in (a, b)$; $\xi \in \mathbb{R}^n$

Poznámka: (LS) … $\underline{x}' = \mathbb{A}\underline{x} + b$ (nehomogenní soustava)

(LSH) $\underline{x}' = \mathbb{A}x$ (homogenní soustava)

Def.: Obecné řešení (LS) jsou všechna řešení. (Obvykle ve tvaru vzorce.)

Partikulární řešení – jedno z množiny řešení (určené nejčastěji počáteční podmínkou)

Struktura řešení (LS)

1. Každá lineární kombinace řešení (LSH) je také jejím řešením.

$\underline{x}' = \mathbb{A}\underline{x}$; $\underline{x}$ a $\underline{y}$ jsou řešení

$\underline{z} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{y}$, $\underline{z}' = \alpha\underline{x}' + \beta\underline{y}' = \alpha\mathbb{A}\underline{x} + \beta\mathbb{A}\underline{y} = \mathbb{A}(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = \mathbb{A}\underline{z}$

2. Obecné řešení (LSH) má tvar

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i ,$$

kde $\{u_1, \dots, u_n\}$ jsou lineárně nezávislá řešení (LSH) a $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

u_i je řešení pro které je $u_i(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – i-tý řádek,

$t_0 \in (a, b)$, $\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{u_i}(t)$, $\underline{x}(t_0) = \underline{c}$

Def.: n-tice lin. nezávislých řešení $\{u_1, \dots, u_n\}$ (LSH) se nazývá fundamentální systém (LSH)

3. Obecné řešení (LSH) je lineární prostor dimenze n a fundamentální systém je jeho báze.

4. Zápis řešení

Označme $\mathbb{U} = (\underline{u_1}, \underline{u_2}, \dots, \underline{u_n})$

Pak $\underline{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{u_i} \Leftrightarrow \underline{x} = \mathbb{U} \cdot \underline{c}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1, u_2, \dots, u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Matici $\mathbb{U} = (\underline{u_1}, \dots, \underline{u_n})$, kde $\{\underline{u_1}, \dots, u_n\}$ je fundamentální systém (LSH), nazýváme její fundamentální maticí.

5. Partikulární řešení, které vyhovuje počáteční podmínce má tvar:

$\underline{x}(t_0) = \underline{\xi} \Rightarrow \underline{x}(t) = \mathbb{U}(t) \cdot \underline{c}$ a $\mathbb{U}(t_0) \cdot \underline{c} = \underline{\xi} \Rightarrow \underline{c} = \mathbb{U}(t_0)^{-1} \cdot \underline{\xi}$

$$\underline{x}(t) = \mathbb{U}(t) \cdot \mathbb{U}(t_0)^{-1} \cdot \underline{\xi}$$

6. Vlastnosti fundamentální matice

a) $\mathbb{U}$ je fundamentální matice, pak $\mathbb{V}(t) = \mathbb{U}(t) \cdot \mathbb{C}$, kde $\mathbb{C}$ je regulární matice, je také fundamentální.

b) Je-li $\mathbb{U}$ fundamentální matice v bodě $t_0 \in (a; b)$, tj. $\det \mathbb{U}(t_0) \neq 0$, pak $\det \mathbb{U}(t) \neq 0$ pro $t \in (a; b)$.

c) Matice $\mathbb{U}(t) \cdot \mathbb{U}^{-1}(t_0)$ je fundamentální maticí, která se nazývá standardní v bodě t_0 a partikulární řešení určené poč. podmínkou $\underline{x}(t_0) = \underline{\xi}$ má tvar

$$\underline{x}(t) = \left(\mathbb{U}(t) \cdot \mathbb{U}^{-1}(t_0)\right) \cdot \underline{\xi}$$

Struktura řešení (LS)

7. Rozdíl dvou řešení (LS) je řešením (LSH).

$$\underline{x}' = \mathbb{A}\underline{x} + \underline{b} \qquad \underline{x}' - \underline{y}' = \mathbb{A}(\underline{x} - \underline{y})$$
$$\underline{y}' = \mathbb{A}\underline{y} + \underline{b} \qquad (\underline{x} - \underline{y})' = \mathbb{A}(\underline{x} - \underline{y})$$

8. Obecné řešení (LS) má tvar součtu partikulárního řešení (LS) a obecného řešení (LSH), tj. $\underline{x}(t) = \mathbb{U}(t)\cdot\underline{c} + \underline{y}(t)$. $\mathbb{U}$ je fundamentální matice (LSH).

9. Určení obecného řešení (LS) – Metoda variace konstant.
Hledáme řešení $\underline{y}$ ve tvaru $\underline{y}(t) = \mathbb{U}(t)\cdot\underline{c}(t)$, potom dostaneme
$\underline{y}'(t) = \mathbb{U}'(t)\cdot\underline{c}(t) + \mathbb{U}(t)\cdot\underline{c}'(t)$
$\mathbb{U}'(t)\underline{c}(t) + \mathbb{U}(t)\cdot\underline{c}'(t) = \mathbb{A}\cdot\mathbb{U}(t)\underline{c}(t) + \underline{b}$, $\quad \mathbb{U}(t)\cdot\underline{c}'(t) = \underline{b}$, $\quad \underline{c}'(t) = \mathbb{U}^{-1}(t)\cdot\underline{b}(t)$,
$\underline{c}(t) = \int \mathbb{U}^{-1}(z)\,\underline{b}(z)\,dz$

Řešení (LS) (obecné) má tvar:

$$\underline{x}(t) = \mathbb{U}(t)\cdot\int \mathbb{U}^{-1}(z)\,\underline{b}(z)\,dz$$

Vzorec pro obecné řešení:

$$\underline{x}(t) = \mathbb{U}(t)\mathbb{U}^{-1}(t_0)\underline{\xi} + \mathbb{U}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbb{U}^{-1}(z)\,\underline{b}(z)\,dz \qquad \text{a} \quad \underline{x}(t_0) = \underline{\xi};$$

. Princip superpozice
$\underline{x}' = \mathbb{A}x + \sum_{k=1}^{m} \underline{b}_k$; Obecné řešení má tvar $\underline{x}(t) = \mathbb{U}(t)\cdot\underline{c} + \sum_{k=1}^{m} \underline{y}_k$, kde
$\underline{y}_k$ je partikulární řešení $\underline{y}_k' = \mathbb{A}\underline{y}_k + \underline{b}_k$

Soustavy s konstantní maticí

(S) $\underline{x}' = \mathbb{A}\underline{x}$, $\mathbb{A} = (a_{ik})$; $a_{ik} \in \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

1. Řešení existuje v $\mathbb{R}$
2. (S) má řešení tvaru $\underline{x}(t) = e^{\lambda t}\underline{\xi}$

$$\lambda e^{\lambda t}\underline{\xi} = \mathbb{A}\cdot e^{\lambda t}\underline{\xi}, \quad \lambda\underline{\xi} = \mathbb{A}\underline{\xi}, \quad (\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A})\underline{\xi} = \underline{0}$$

Def.: Číslo λ pro které je $\det(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) = 0$ se nazývá charakteristické číslo matice $\mathbb{A}$ a NENULOVÝ vektor $\underline{\xi}$, který je řešením soustavy $(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) = 0$ nazýváme charakteristickým vektorem

Poznámka: Rovnice $\det(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) = 0$ se nazývá charakteristická rovnice matice $\mathbb{A}$ a má tvar

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

Věta: Charakteristické vektory příslušné různým charakteristickým číslům jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: $\lambda \neq \mu$; $\quad \lambda \underline{u} = \mathbb{A}\underline{u}$, $\quad \mu \underline{v} = \mathbb{A}\underline{v}$

$$\alpha \underline{u} + \beta \underline{v} = \underline{0} \iff \alpha = \beta = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\lambda\underline{u} + \beta\lambda\underline{v} &= 0 \\ \alpha\mathbb{A}\underline{u} + \beta\mathbb{A}\underline{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \beta(\lambda-\mu)\underline{v} = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

Věta: Má-li charakteristická rovnice matice $\mathbb{A}$ n různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak matice $\mathbb{U} = (e^{\lambda_1 t}\underline{\xi}_1, e^{\lambda_2 t}\underline{\xi}_2, \dots, e^{\lambda_n t}\underline{\xi}_n)$, kde $\underline{\xi}_k$ je charakt. vektor příslušný číslu λ_k, $1 \le k \le n$, je fundamentální maticí

$$(S) \dots \quad \underline{x}' = \mathbb{A}\cdot\underline{x}$$

Obecné řešení má tvar $\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t}\underline{\xi}_i$

Příklad:
$x_1' = x_1 - x_2$
$x_2' = -4x_1 + x_2$
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -4, & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \lambda-1, & 1 \\ 4, & \lambda-1 \end{pmatrix}; \quad \det(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 4, & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\underline{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 4, & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\underline{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$u_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $u_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} e^{3t}, & e^{-t} \\ -2e^{3t}, & 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

(*) Obecné řešení:
$$\underline{x}(t) = C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(**) nebo: $\underline{x}(t) = \mathbb{U}(t)\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t}, & e^{-t} \\ -2e^{3t}, & 2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$

Poznámka: $\mathbb{A}$ je reálná matice

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ jsou komplexní kořeny char. rovnice

$(\alpha \pm j\beta)\underline{\xi} = \mathbb{A}\underline{\xi}$ Vektory příslušné komplexně sdruženým kořenům jsou komplexně sdruž.

Dvojice řešení má tvar $e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm j\sin\beta t)(\underline{u} \pm j\underline{v}) \equiv e^{\alpha t}(\cos\beta t\,\underline{u} - \sin\beta t\,\underline{v})$;
$e^{\alpha t}(\sin\beta t\,\underline{u} + \cos\beta t\,\underline{v})$

Příklad: $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1, & -3 \\ 3, & 1 \end{pmatrix}$

$$(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) = \begin{pmatrix} \lambda-1, & 3 \\ -3, & \lambda-1 \end{pmatrix}, \quad \det(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 3j$: $\begin{pmatrix} 3j, & 3 \\ -3, & 3j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\xi}_1 = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} je^{(1+3j)t}, & -je^{(1-3j)t} \\ e^{(1+3j)t}, & e^{(1-3j)t} \end{pmatrix} \approx e^t\begin{pmatrix} -\sin 3t, & \cos 3t \\ \cos 3t, & \sin 3t \end{pmatrix}$

Poznámky:
1. $n = 1$: $\quad x' = at$
$x(t) = Ce^{at} \qquad x(t_0) = \xi \Rightarrow x(t) = e^{-at_0}\xi e^{at} = e^{a(t-t_0)}\xi$

2. Je-li $\mathbb{U}(t)$ fund. maticí $\underline{x}' = \mathbb{A}\underline{x}$, pak $\mathbb{U}(t-t_0)$ je také fund. maticí.
$$\left.\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \mathbb{U}(t)\cdot\underline{c} \\ x(0) &= \underline{\xi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= \mathbb{U}(t-t_0)\underline{c} \\ \underline{x}(t_0) &= \underline{\xi} \end{aligned}$$

Algoritmus pro standardní fundamentální matici

Def.: Standardní fundamentální matici soustavy (S) $\underline{x}' = \mathbb{A}\underline{x}$ v bodě $t_0 = 0$ označujeme $e^{\mathbb{A}t}$ — exponenciela matice $\mathbb{A}$. Matice $e^{\mathbb{A}(t-t_0)}$ je pak standardní v bodě $t = t_0$.

Obecné řešení má tvar $\underline{x}(t) = e^{\mathbb{A}(t-t_0)}\xi$ $\quad (\underline{x}(t_0) = \underline{\xi})$

Popis algoritmu

Je-li $\det(\lambda\mathbb{E} - \mathbb{A}) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$, $k_1 + \ldots + k_m = n$, pak

$e^{\mathbb{A}t} = b_0\mathbb{E} + b_1\mathbb{A} + \ldots + b_{n-1}\mathbb{A}^{n-1} = P(\mathbb{A})$, kde b určíme ze soustavy:

$P(\lambda_i) = e^{\lambda_i t}$, $P'(\lambda_i) = te^{\lambda_i t}$, $\ldots$, $P^{(k_i-1)}(\lambda_i) = t^{k_i-1}\cdot e^{\lambda t}$; $i = 1, \ldots, m$;

Příklad: Eliminační metoda

$x_1' = -x_1 + 2x_2$
$x_2' = -3x_1 + 4x_2$

$x_2 = \frac{1}{2}(x_1' + x_1)$

$\frac{1}{2}(x_1'' + x_1') = -3x_1 + 2x_1' + 2x_1$

$x_1'' - 3x_1' + 2x_1 = 0$, $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1) = 0$

$x_1 = C_1e^{2t} + C_2e^t$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(2C_1e^{2t} + C_2e^t + C_1e^{2t} + C_2e^t\right) = \frac{3}{2}C_1e^{2t} + C_1e^t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^t \\ \frac{3}{2}C_1e^{2t} + C_2e^t \end{pmatrix}$$